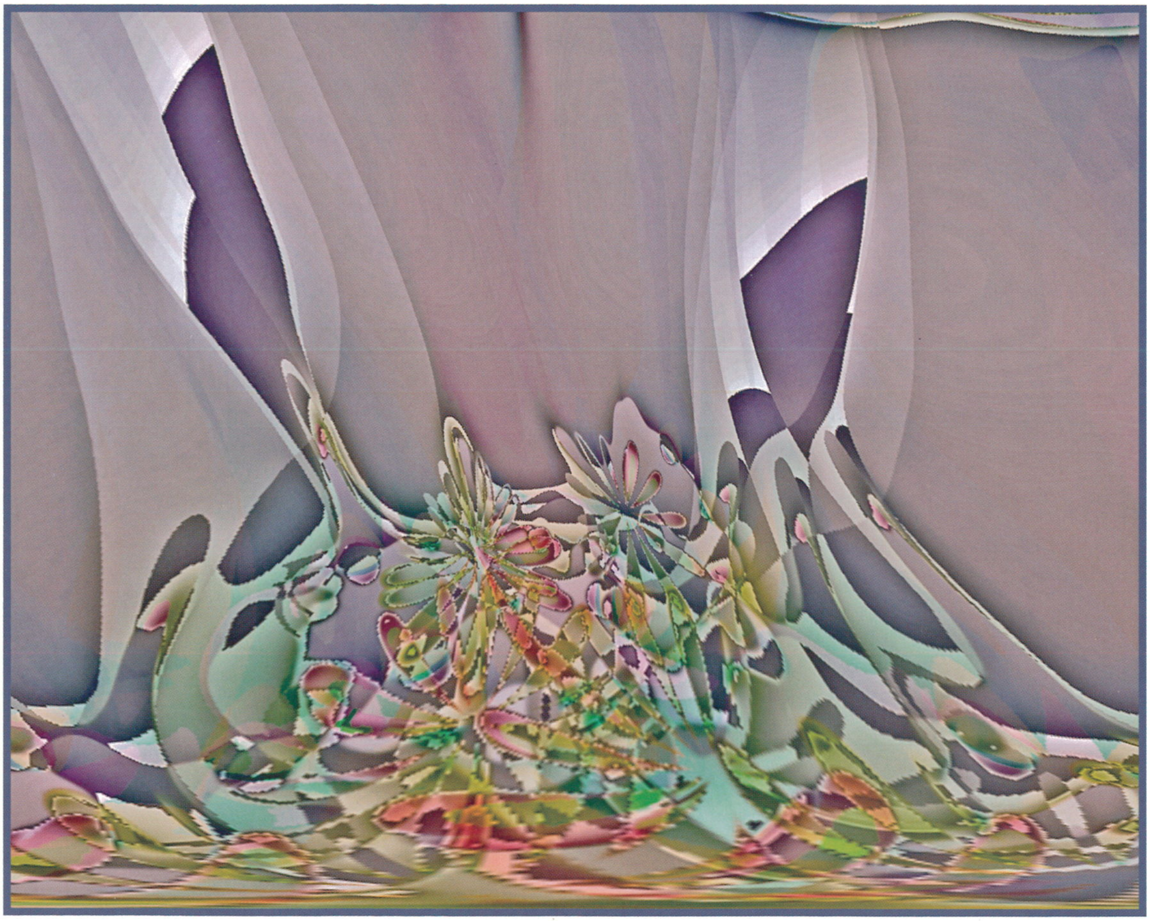
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2012年５月１日発行　第50巻５号　毎月１回１日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

5
2012

特集 解析学と物理学
響き合う数学的方法と物理的思考



No.587

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 587 May 2012

解析学と物理学

響き合う数学的方法と物理的思考

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2009 年/5 省略

- 2009 年/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
- /7 現代物理の世界像
- /8 複素数
- /9 シュレーディンガー
- /10 数学と物理に広がる不変量
- 別冊 量子重力理論
- /11 可積分系の世界
- /12《原理》の探求
- 2010 年/1 無限次元の魅力
- /2 数学の可視化
- /3 物理数学の効用
- /4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
- 別冊 現代幾何学の発展
- /5 物理学事始め
- /6 現代幾何と方程式
- /7 物理学と行列
- /8 力の統一にむけて
- /9 南部陽一郎
- /10 曲面の不思議
- /11 連続から離散へ
- /12 物理における《破れ》と調和
- 2011 年/1 数論の探求
- /2 物理現象を読み解く数学的手法
- /3 方程式と現代代数学
- /4 物理学と多様体
- /5 初学者を悩ます数理の概念
- /6 物理イメージと数式表現
- /7 〈隠れた〉物理法則
- /8 計算が拓く数学と物理の世界
- /9 オイラー
- /10 時空と熱力学
- /11 線形から非線形へ
- /12 物理と仮説
- 2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
- /2 古典のススメ［物理編］
- /3 量子を操る
- /4 量子力学の数学的技法

数理科学臨時別冊一覧

- 11 年/3 繰りこみ群の物理と数理
- 11 年/4 超重力理論
- 11 年/6 共形場理論
- 11 年/9 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
- 11 年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
- 11 年/11 リーマン予想の数理物理
- 11 年/12 量子多体系の物理
- 12 年/1 現象から方程式を創り出す
- 12 年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
- 12 年/4 弦理論の代数的基礎

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
ジュンク堂甲府岡島店

ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

May 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 587

特集／解析学と物理学

数学vs.物理学，あるいは数学と物理の共鳴

伊東 恵一

今回原稿を書かせていただいている「数理科学」は京都大学の数理解析研究所の設立の頃に刊行が始まったように伺っている．1960年代で研究所には佐藤幹夫先生や荒木不二洋先生，中西襄先生らがおられ，数学と物理学の交流が意識せずに普通に行われていたように思う．どういう文脈で言われたのか忘れたが佐藤先生がどこかのレストランでにこやかに笑いながら「物理帝国主義ですからね」と言われるのを聞いた記憶がある．昔朝永先生の研究室におられたこともあるという佐藤先生が，数理解析研究所に来られ超関数理論の仕事の後，可積分系の仕事に入られた一因はこの辺かなと思ったりする（まさか）．

1970年代以前とそれ以降では数学と物理の関連は質的にも量的にも違ってきて，それ以前ではその関連はありはしたものの牧歌的で，部外者にも容易に理解できたように思う．しかし1970年代以降は良くも悪くもかなり専門的になってきたように思われる．

物理学者の言う証明と数学者の言う証明とは微妙に（多分かなり）違う．物理学者はあることを信ずるのに「証明」が5個くらい（？）ないと信用しないが（荒木先生のお好きな冗談），数学，数理物理学では「証明」は一つあれば十分である．

以前は寺沢寛一先生の教科書で済んでいた数学の教科書に加藤敏夫先生のそれが加わり，今やReed–Simonの4部作の教科書やA. Connesの非可換幾何のテキストは必要な基礎知識の一つになってしまった．これにstring理論や，Anderson局在，量子ホール効果といった現代物理が加わるとそれを統一して俯瞰し，卓越した業績を残せる人はそれほど多くはない．

さて数学(M)と物理(P)の共鳴について歴史を遡り現代を論じてみよう．1910年代のH. Poincareや1930年代のJ. von Neumannの偉業は万人の認めるところである．少し前偶然，von Neumannの論文集を概観するチャンスを得た．作用素環の有名な論文，量子力学の基礎に関する論文，乱流に関する論文，宇宙論に関する論文，量子エルゴード理論に関する論文など多岐にわたり，その多くが20世紀の数学と物理の基礎をなした（もちろんゲームの理論もある）．1929年の量子エルゴード理論に関する論文は一部の学者の誤解で間違いとされたが，それは正しく新しい真理を含む「宝箱」にも等しいと最近J. Lebowitzたちが指摘している．

彼が原爆作成のマンハッタン計画に加わり現代科学の負の側面を担い，加えて人間的に毀誉褒貶があることは事実としても，彼が20世紀の$M \cap P$のみならず，$M \cup P$においても卓越した学者であることは言うまでもない．多くの数学者，物理学者がその多くを彼に負っている．その意味で竹崎先生が寄稿された原稿の中でvon Neumann, Connesから始められ，それを引き継ぐ形で，河東先生がV.F.R. Jonesに触れられたのは極めて自然である*1)．

*1) 誰が偉人であるかはその人の専門と価値感によるのは確かで，私の近傍には，「現人神」J. Fröhlichとか「現人神」

戦後の数学と物理の強い交わりは場の理論の数学的分析から始まっているように思う．戦勝国で勢いのあった Princeton 大学には R. Oppenheimer や F. Dyson がいて，A.S. Wightman が先頭に立って場の理論の数学的基礎を固めようとしており，その影響を受けたと思われる I. Segal, E. Nelson, J. Glimm そして A. Jaffe が繰り込み理論の数学的基礎付けを行ったのは，1965 年代からである（*Commun. Math. Phys.* の刊行年）．

この少し後 K. Osterwalder と R. Schrader がユークリッド的方法を考え，統計力学でいう相関関数を求めれば万事解決するということになり，少し前から胡散臭く思われながら物理で使われている関数積分が段々地歩を占め数学にも影響を与えていったように思われる．しかしこれがその後の数学に大きな影響を与えたことは，E. Witten の業績をみれば明白である．付け足すと，OS 公理にある reflection positivity の概念は重要で，Hamiltonian の存在を保証するものであるが，以後統計力学や可解模型の研究など，多くの場面で使われることになる．

科学の進歩というものは後で見ると予定調和に見えるが，その瞬間その瞬間ではそれからほど遠い．場の理論で皆が存在証明に血道をあげていた 4 次元 ϕ^4 模型が K. Wilson の繰り込み群と 4 次元 Ising 模型の臨界点でのガウス性から絶望的になった頃，佐藤幹夫先生が厳密に解ける 2 次元 Ising 模型の連続極限で非自明な場の理論を作るのに興味をもたれた．これはすでに研究済みの 2 次元の ϕ^4 模型の強結合極限に対応すると思われたし，2 次元 Ising 模型は厳密に解けるので私自身はそれは解決済みの簡単な演習問題だと思っていた．

しかし後で考えてみると多くの物理理論は臨界点や極限状態では可解になることを暗示していた．そしてその裏には豊穣な「可積分系」の世界があり，共形不変性，Yang–Baxter 関係，量子群などと進んでいった．そしてそれは Connes の非可換幾何などとも連携していくのであった．そしてこの非可換幾何は string 理論や非局所場理論ともつながっている．

物理学と数学は，その区別がなかったニュートン時代の伝統でヨーロッパでは課程も教育も連携して行われてきたように感じる．日本ではそういう歴史がないので，2 つが分断して行われてきた経緯がある．最近の学問の世界では，「目立つ」結果を出さないと誰も見向いてくれないので，この「ガラスの壁」を打ち破るのはよっぽどの覚悟と才能と努力がいる（廣川氏の寄稿を御覧ください）．

今回編集部のほうからこのようなタイトルで特集を組む機会を与えられたが，どのような方に原稿を依頼しようかと考えるのは楽しくも悩ましくもあった．原隆氏は入り組んだ計算をやり遂げる数理物理学の泰斗であり繰り込み群やパーコレーションで業績を残されてきたが，今回は入門的解説をしていただいた．廣島文生氏は古典近似された場の量子論（Nelson 模型など）を偏微分方程式と経路積分を通じて分析してこられ，モデル Hamiltonian の自己共役性の証明などの仕事がある．廣川真男氏は廣島氏と同様なシステムを研究してきたが，最近は E. Lieb 氏が genuine physics と言ったという微小電子回路に作られる最小量子場理論（Rabi 模型）の研究に取り組んでおられる．千葉逸人氏は一番若く，院生の頃から非線形振動の解法を研究されており，最新の結果を解説された．磯崎洋先生は（偏）微分方程式の第一人者で，この分野ですでにいくつもの著作があり，今回は若い読者にも分かるよう書き下ろしていただいた．高崎金久，中津了勇両氏は佐藤先生に連なる門下生で可積分系の第一線で仕事をされてこられた．今回はテーマに苦労されたようであるが，分かりやすく最近の流れを書いていただいた．

重要な問題を見極め解法を見つけることは才能のみならず運も要求される．しかし竹崎先生も言っておられるように，我こそはと思うこれからの世代に興味を持っていただければ幸いである．

（いとう・けいいち，摂南大学理工学部）

E. Lieb とかいう熱狂的な人もいることを「平等」のため付け加えておこう．

関数方程式のダイナミクスとスペクトル理論



千葉 逸人

1. 関数方程式

多くの物理現象は数学的な関係式を用いて記述され，その関係式を調べることで，より一層現象の理解が深まる．特に，ある物理量 u の時間変化を支配する方程式は，次のような微分方程式

$$\frac{du}{dt}=F(t,u) \tag{1}$$

で与えられることが多い．未知量 u は時間 t 以外の変数に依存することもあるし，写像 F の詳細は問題に依存する．いくつか例を見てみよう．

バネ定数 k のバネの先端に取り付けられた質量 m の質点の運動を考えよう．時刻 t における質点の変位を $y(t)$，質点と床の間の摩擦係数を μ とするとき，運動方程式は 2 階の常微分方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{dy}{dt}+ky=0$$

で与えられる．時刻 t における質点の速度を $dy/dt=v(t)$ とすると，上式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\mu/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように行列とベクトルを使って 1 階の常微分方程式の形に書ける．したがってこの場合，(1) の u は $u=(y,v)\in\mathbf{R}^2$ なる 2 次元ベクトルであり，F は u に行列を作用させる写像である．

物理量 u の拡散を表す方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u \tag{3}$$

で与えられる．ここで $u=u(t,x)$ は時間 t，および空間変数 $x\in\mathbf{R}^n$ に依存する関数であり，Δ は

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

で定義される n 次元のラプラシアンである．定数 D は拡散係数と呼ばれる．例えば物体を伝わる熱の挙動は式 (3) で記述され，$u(t,x)$ は時刻 t，位置 x における物体の温度を表す．また，適当な媒質中を拡散していく化学物質の濃度も (3) で記述されることが多い．より一般に，化学物質が他の物質との化学反応により合成・分解している場合には，合成・分解を表す項 f を付け加えた方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+f(t,x,u) \tag{4}$$

が考えられる．一般に f は u について非線形項であり，このようなタイプの偏微分方程式は反応拡散系と呼ばれる．

波の伝わり方を記述する波動方程式は，c を定数として $\partial^2u/\partial t^2=c\Delta u$ で与えられる，時間について 2 階の偏微分方程式である．式 (2) の導出の真似をして $v=\partial u/\partial t$ とおけば

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5}$$

となり，(1) の形に表すことができる．このときの F は作用素を成分に持つ 2×2 の行列である．

これらの他にも，Schrödinger 方程式や Navier–Stokes 方程式など，物理現象を記述する偏微分方程式は多く知られている．一方，希薄流体の運動を表す Boltzmann 方程式のように確率密度関数が未知関数であるような方程式の場合には，方程式が未知関数の積分を含む積分方程式になることがしばしばある．この場合には (1) の F は積分作用素を含むであろう．このように，F がどのような写像かによって方程式のタイプは様々であるが，そういった方程式のタイプにとらわれずに一般的に（抽象的に）方程式 (1) を研究したいときは，(1) のことを単に**関数方程式**と呼ぶこと

が多い．特に (1) は「未知関数の時間微分 $= (\cdots)$」という形をしているので，（時間）**発展型の関数方程式**といい，主に t が増大していくときの u の挙動に興味がある．

2. 線形方程式の解の漸近挙動

簡単のため，写像 F が t に依存せず，u に対して線形写像である場合を考えよう．F の代わりに A と書くことにする：

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{6}$$

(2), (3), (5) はこのタイプの方程式である．

(i) 有限次元の場合．

未知量 u が有限次元ベクトル空間 X（$\mathbf{R}^n$ か $\mathbf{C}^n$ としておく）の元で，A が X 上の線形写像のとき，(6) を有限次元の線形方程式と呼ぶ．このとき，A は $n \times n$ の行列であるから，(6) を成分ごとに

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

と書くことができる．したがって有限次元の線形方程式とは，単に線形の常微分方程式のことに他ならない．よく知られているように，任意に与えた初期値 $u(0) \in \mathbf{C}^n$ に対して (6) の解は一意に存在し，それは行列の指数関数を使って

$$u(t) = e^{At}u(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}u(0) \tag{7}$$

と表される．行列の対角化，あるいは Jordan 標準形を知っていれば行列の指数関数を計算するのはそれほど難しくなく，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を行列 A の互いに相異なる固有値とするとき，(6) の解は $e^{\lambda_i t} \times$ (多項式) の形の項の一次結合で書ける．この表式からただちに次のことが分かる．

定理 1　行列 A の固有値の実部がすべて負のとき，(6) の任意の解は $t \to \infty$ で指数的に 0 に収束する．もし 1 つでも実部が正なる固有値が存在すれば，(6) の解で指数的に発散するものが存在する．

後の都合のため，定理 1 の別証を与えておこう．線形常微分方程式は Laplace 変換を用いて解くことができる．Laplace 変換論によれば，(6) の解は Laplace 逆変換の公式を用いて

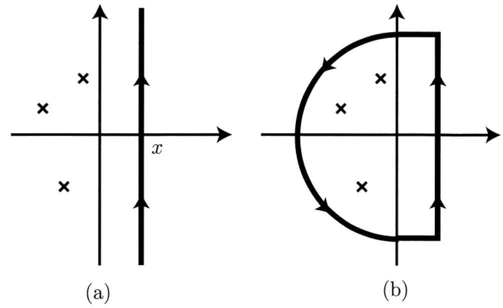


図 1　積分路の変形．×印は固有値を表す．

$$u(t) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}u(0)d\lambda \tag{8}$$

で与えられる．ここで，x は A のどの固有値の実部よりも大きい適当な実数である（図 1 (a)）．上式の積分は留数定理を用いて計算できるが，そのために次のことを思い出しておこう．行列 $(\lambda - A)^{-1}$ の成分は λ についての有理関数であり，A の固有値がちょうど極になっている．すなわち，式 (8) の被積分関数の特異点は A の固有値のみから成る．そこで式 (8) の積分路を図 1 (b) のように変形して留数定理を用いれば，$u(t)$ が $e^{\lambda_i t} \times$ (多項式) の形の項の一次結合で書けることが分かる．

(ii) 無限次元の場合．

方程式 (6) において，u がある無限次元ベクトル空間 X の元，A が X 上の線形作用素のとき，(6) は無限次元の方程式であるという．拡散方程式 (3) は無限次元の方程式の代表格であるが，無限次元の方程式の難しさの 1 つとして，方程式を指定してもベクトル空間 X の選び方に依って解の構造が変わり得ることが挙げられる．以下でいくつかの具体例を見てみよう．簡単のため，拡散係数は $D = 1$，空間変数 x は 1 次元としておく．

(a) $L > 0$ を適当な実数として，式 (3) は区間 $0 \leq x \leq L$ 上で定義されているとする．これを

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \tag{9}$$

という境界条件の下で解くことを考えよう．このとき，空間 $X := C_D^0[0, L]$ を，閉区間 $[0, L]$ 上で連続かつ $f(0) = f(L) = 0$ を満たす複素数値関数 $f(x)$ の全体としよう．標準的な加法により，実際にこれは $\mathbf{C}$ 上の無限次元ベクトル空間になる．式 (3) を境界条件 (9) の下で解きなさいという問題は，式 (3) の解を空間 $X = C_D^0[0, L]$ の中で探しなさい，という問題に他ならない．

(b) 式 (3) の解のうち，導関数までこめて有界なものを探したいとしよう．このときは適当な自然数 r をとって $X = BC^r(\mathbf{R})$ とおくのがよい．これは，$f(x)$, $f'(x), \cdots, f^{(r)}(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で一様連続かつ有界であるような関数 f の全体からなる空間である．

(c) 式 (3) の解のうち，2 乗可積分であるものを探したいとしよう．このときは $X = L^2(\mathbf{R})$ を 2 乗可積分（$\int |f(x)|^2 dx$ が存在する）な関数全体からなる空間とするのがよい．

上の 3 つの空間はいずれもある標準的なノルムの定義により Banach 空間になり，$A = \Delta$ の定義域はそれぞれ X の稠密な部分空間であることを注意しておく．さて，方程式 (6) と空間 X が与えられたとき，次の 2 つの基本的な問題が起こる．

well-posedness. 任意に与えられた初期値 $u(0) \in X$ に対し，式 (6) を満たす解 $u(t)$ が X の中に一意に存在し，それは $t \geq 0$ について連続かつ初期値の変動に関して連続か？

漸近挙動. 解が任意の $t \geq 0$ について存在したとき，$t \to \infty$ における解の振舞いは？

この記事では well-posedness の問題は扱わず（上の 3 つの例はすべて well-posed である[1]），解の漸近挙動の問題を考えることにする．目下の疑問は，「無限次元の方程式に対しても定理 1 に対応する定理があるか？」である．

3. 線形作用素のスペクトル

定理 1 の無限次元バージョンを見つけるために，固有値の一般化概念であるスペクトルを導入するのは自然なことであろう．以下では簡単のため X を Banach 空間とし，A を X 上の線形作用素とする．A の**レゾルベント集合** $\rho(A)$ を，$(\lambda - A)^{-1}$ が存在して X 上の連続作用素となるような $\lambda \in \mathbf{C}$ の全体として定義し，A の**スペクトル集合** $\sigma(A)$ を $\rho(A)$ の $\mathbf{C}$ における補集合として定義する．簡単に言えば，スペクトルとは $(\lambda - A)^{-1}$ がたちの悪い性質を持つ点 λ のことであるが，さらに次の 3 つに分類することができる．

点スペクトル $\sigma_p(A)$．$\lambda - A$ が X 上単射でないような点 λ の全体．

剰余スペクトル $\sigma_r(A)$．$\lambda - A$ が X 上単射であるが，その値域が X の稠密な部分空間でないような点 λ の全体．

連続スペクトル $\sigma_c(A)$．$\lambda - A$ は単射かつ値域が稠密であるが，逆写像 $(\lambda - A)^{-1}$ が X 上の連続作用素にならないような点 λ の全体．

点スペクトルとは A の固有値，すなわち $Av = \lambda v$ が X の中に $v \neq 0$ なる解 v を持つような点 λ の全体に他ならない．A が有限次元の行列のときには $\lambda - A$ が単射であることと全射であることは同値であるが，無限次元のときには同値にならない．そこで $\lambda - A$ が全射にならないような λ を特別扱いしたいが，実は大抵の場合には $\lambda - A$ は全射になり得ない．そこで条件を少し緩めて，$\lambda - A$ の値域が稠密になるような λ を特別扱いする．それが剰余スペクトルである．もし λ が点スペクトルでも剰余スペクトルでもなければ，逆写像 $(\lambda - A)^{-1}$ が存在してその定義域は稠密である．さらに，もし $(\lambda - A)^{-1}$ が連続作用素であれば，定義域を X 全体へと連続に拡張できる．そのように拡張できない λ の全体が連続スペクトルである．

前節の 3 つの例に対してそのスペクトルを計算してみよう．ただしいくつかの証明は省略する．

(a) $A = \Delta, X = C_D^0[0, L]$ とする．固有方程式は

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v, \quad v(0) = v(L) = 0$$

である．常微分方程式の簡単な計算から，$v \in C_D^0[0, L]$ を満たす $v \neq 0$ が存在するのは $\lambda = -(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \cdots$ のときに限ることが分かる．したがって $\sigma_p(A) = \{-(n\pi/L)^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$ である．連続スペクトルと剰余スペクトルは存在しないことが示せる．

(b) $A = \Delta$, $X = BC^r(\mathbf{R})$ とする．常微分方程式 $v'' = \lambda v$ の解のうち，$\mathbf{R}$ 上有界な解が存在するのは，$\lambda = 0$ のときは $v = 1$, $\lambda < 0$ のときは $v(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x$, $\sin\sqrt{-\lambda}x$，に限る．したがって $\lambda = 0$ と負の実軸が固有値である．それ以外にスペクトルは存在しない．

(c) $A = \Delta$, $X = L^2(\mathbf{R})$ とする．常微分方程式 $v'' = \lambda v$ の解のうち $L^2(\mathbf{R})$ に属するものは $v = 0$ を除いて存在しない．したがって点スペクトルは空集合である．では連続スペクトルはどうだろうか．適当な $f \in X$ に対して $(\lambda - A)^{-1} f$ を計算してみよう．$(\lambda - A)u = f$ を満たす u を求めればよい．$L^2(\mathbf{R})$ は Fourier 変換で不変であることに注意して，両辺を Fourier 変換し

て解くと $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)/(\lambda + \xi^2)$ を得る．λ が 0 か負の実数のとき，これは ξ の関数として 2 乗可積分でないことは容易に分かる．いい加減な観察ではあるが，実際に $\lambda = 0$ と負の実軸が連続スペクトルであることが示せる．剰余スペクトルは存在しない．

以上の 3 つの例から，方程式が同じでも X の選び方でスペクトルが変わることが分かるだろう．したがって，もし定理 1 の無限次元バージョンが存在するとすれば，解の漸近挙動も X の選び方に依存すると思われる．これが無限次元の方程式の難しさであり，面白さでもある．では定理 1 の無限次元バージョンは本当にあるのか？ 実は Banach 空間上の有界作用素に対しては，そのスペクトル集合は有界集合になることが知られている．上の 3 つの例はいずれもスペクトルが非有界であるから，$A = \Delta$ は非有界作用素，すなわち $||A|| = \infty$ である．このとき，無限級数 (7) は $t > 0$ において収束しない．したがって，指数関数を用いて定理 1 を得ようとする試みは破たんするのである．そこで Laplace 逆変換の出番になる．A が非有界作用素の場合にも式 (8) の右辺は一定の条件の下，存在することが知られている[1]．ここではその条件について深入りしないし，以下の議論でも (8) の積分が確定する場合のみを扱う．

4. 角域作用素

もし Laplace 逆変換の積分路を，特異点（= スペクトル集合）を通らずに図 2 (a) のように変形できたら，被積分関数の $e^{\lambda t}$ という因子のために，解 $u(t)$ は指数的に減衰することが分かる．一方，もし右半面にスペクトルが存在して図 2 (b) のようにしか変形できない場合は指数的に発散するかもしれない．いずれの場合にも，積分路の遠方では $e^{\lambda t}$ が急速に減衰するため，(8) の右辺の存在証明は特別に簡単になることに注意しておこう．以上の観察に基づいて，以下の定義を設ける．

$$S_{\phi,a} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \pi - \phi < \arg|\lambda - a| < \pi + \phi\}$$

を，点 $a \in \mathbf{R}$ を中心とする $\mathbf{C}$ 上の角領域とする．

定義． Banach 空間 X 上で稠密に定義された閉作用素 A について，ある $a \in \mathbf{R}$ と $0 < \phi < \pi/2$ が存在して $\sigma(A)$ が $S_{\phi,a}$ に含まれるとき，A を**角域作用素**と呼ぶ．

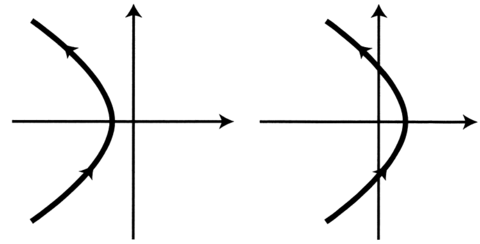


図 2　積分路の変形．

実際には (8) の積分を収束させるための $||(\lambda - A)^{-1}||$ の大きさに対する仮定も必要だが，ここでは技術的なことには触れない[2]．

この仮定の下では実際に (8) の積分路を図 2 のように変形させることができ，所望の結果を得る．

定理 2　A を角域作用素とし，スペクトル集合 $\sigma(A)$ の任意の点が $\mathrm{Re}(\lambda) < \alpha$ を満たすとする．このとき，任意の $u(0) \in X$ に対して関数方程式 $\partial u/\partial t = Au$ の解が X の中に一意に存在して，ある $C > 0$ に対して $||u(t)|| < Ce^{\alpha t}$ を満たす．

前に挙げた 3 つの例はいずれも角域作用素である．特に (a) においてはスペクトルは負の実軸に含まれているから，解が指数的に減衰することが分かる．物理的には，両端の温度を 0 に固定した長さ L の棒の温度の挙動を記述する問題である．両端から熱が逃げていくため，温度が急激に下がっていくことは直観とも合致する．一方，(b), (c) ではスペクトルが原点を含んでいるため，定理 2 からは解は減衰するとも増大するとも言えない．(b) においては $\lambda = 0$ が固有値であり，その固有関数である $v = 1$ が厳密解なのだから，減衰も増大もしない解が存在することが分かる．(c) においては，実は任意の解が $O(1/\sqrt{t})$ で減衰することが知られている．$L^2(\mathbf{R})$ 関数は遠方で緩やかに減衰しているため，熱が少しずつ遠方に逃げていくわけだ．証明法はいくつかあるが，次のようにするのが最も簡単である：

方程式 $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ に対して $t = e^\tau, x = \sqrt{t}\xi$ とおいて (t, x) から (τ, ξ) への変数変換を行うと，$v(\tau, \xi) := u(t, x)$ は次の微分方程式を満たす：

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

右辺の微分作用素の固有値問題は，（係数の違いを除いて）Hermite の微分方程式に他ならないことに注意す

ると，任意の解を固有関数展開できて

$$v(\tau,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{\lambda_n\tau}H_n\left(\frac{\xi}{2}\right)e^{-\xi^2/4}$$

と書けることが分かる．ここで H_n はHermite多項式，$\lambda_n=-(n+1)/2$ は上の微分作用素の固有値である．特に v は $O(e^{-\tau/2})$ で減衰するから，u は $O(1/\sqrt{t})$ で減衰する．発見的に見えるこの方法は，実はLie群論に基づいている．拡散方程式は $t\mapsto c^2t,\ x\mapsto cx$ というスケール変換で不変である．$x=\sqrt{t}\xi$ という変数変換は，ξ が群の作用の不変量になるような標準座標への変換に他ならない．$t=e^{\tau}$ という変換は，多項式減衰を指数的減衰に帰着させるためのトリックだと思えばよい*1)．

以上の例からも，関数空間の選び方，作用素の定義域やスペクトルのタイプによって，解の挙動が全く異なるものになることが分かるだろう．

以下では，初期値 $u(0)$ に対して解 $u(t)$ を対応させる線形写像を $T(t)$ と表す．有限次元の場合には $T(t)=e^{At}$ は行列の指数関数である．定理2は，$T(t)$ が作用素ノルムに関して $||T(t)||<Ce^{\alpha t}$ を満たす，と言い換えることができる．

A が角域作用素でない場合には何か言えることはあるだろうか．実は任意の正の実数 $a,b>0$ に対して，次の性質を満たす作用素 A が存在することが知られている[3]：$\sigma(A)$ は領域 $\mathrm{Re}(\lambda)<-a$ に含まれるが，$T(t)$ のノルムは e^{bt} の速さで発散する．したがって，A のスペクトルからは解の漸近挙動が分からないのだ．困難の本質はスペクトル写像定理が成り立たないことにある．行列 A に対しては，e^{At} の固有値は A の固有値を用いて $e^{\lambda t}$ で与えられることを思い出そう．スペクトル集合の記号を用いて書けば，$e^{\sigma(A)t}=\sigma(e^{At})$ が成り立つ．無限次元空間上の作用素に対しても，集合の等式 $e^{\sigma(A)t}=\sigma(T(t))$ が成り立つとき，スペクトル写像定理が成り立つという．A が有界作用素やHilbert空間上の自己共役作用素の場合にはスペクトル写像定理が成り立つが，一般には $e^{\sigma(A)t}\subset\sigma(T(t))$ である．これは，$T(t)$ の中には $\sigma(A)$ からはうかがい知ることができない情報が含まれ得ることを示している．実は，非有界作用素 A の定義域 $\mathsf{D}(A)$ は空間 X 全体にはならず，その部分空間であるが，$T(t)$ の定義域は X 全体になる．したがって，$\mathsf{D}(A)$ に含まれない初期値 $u(0)$ に対する解 $u(t)=T(t)u(0)$ の情報を A の情報だけから得るのは困難なのだ．逆に言えば，$\mathsf{D}(A)$ に含まれる初期値に制限すれば，$T(t)u(0)$ の挙動について，もう少しよいことが言える[3]．

*1) さらに詳しく言うと，$u(t,x)$ は $t\to\infty$ でガウス分布に収束していく．より一般の方程式に対しても，解が $t\to\infty$ で，あるLie群の作用で不変な解に収束するときには，ここで紹介したものと同様のテクニックが有効であると考えられる．この手法は，物理の業界では“**くりこみ群**”という名でしばしば用いられる．

5. 一般化スペクトル理論の展開

A が角域作用素でない場合には，典型的にはそのスペクトルは虚軸方向に沿って無限遠まで伸びている．このような問題（の一部）を扱うための**一般化スペクトル理論**を紹介しよう．具体例を中心に解説していく．$L^2(\mathbf{R})$ 上で ix を乗じる掛け算作用素を $\mathcal{M}:\phi(x)\mapsto ix\phi(x)$ とおく．$\mathcal{M}$ のスペクトルは連続スペクトルのみからなり，それは虚軸全体となる：$\sigma(\mathcal{M})=i\mathbf{R}$．スペクトルの定義から，レゾルベント作用素 $(\lambda-A)^{-1}$ は右半面と左半面では λ についての関数として正則であるが，虚軸上では（$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素として）値が確定しない．ところが，収束や発散は空間の位相の選び方に依存する概念である（ガウス分布は，分散を0に持っていく極限において，普通の関数としては発散するが，超関数の位相ではデルタ関数に収束することを思い出そう）．$L^2(\mathbf{R})$ とは異なる位相を導入することにより，レゾルベントを虚軸上でも収束させることができるだろうか．これを見るために，適当な関数 $\phi,\psi\in L^2(\mathbf{R})$ をとって内積

$$((\lambda-\mathcal{M})^{-1}\phi,\psi)=\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

を考える．λ が右半面にあるときには右辺の積分は確定するが，これを虚軸に近づけていくと，$1/(\lambda-ix)$ という因子のため，少なくとも被積分関数は発散する．しかし被積分関数が発散していても，積分値は広義積分として存在し得る．この場合，実は ϕ,ψ が連続関数であれば次の値

$$\lim_{\mathrm{Re}(\lambda)\to+0}\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

が確定する．ここからさらに λ を左半面へ向かって連続的に動かそう．ϕ,ψ が虚軸の近傍の適当な領域で正則ならばそれが可能である．すなわち，$((\lambda-\mathcal{M})^{-1}\phi,\psi)$ の右半面から左半面への解析接続は

$$\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx+2\pi\phi(i\lambda)\overline{\psi(i\lambda)}$$

で与えられる．以下では説明の簡単のために ϕ と ψ は整関数であるとしよう．以上の考察から，

$$
R(\lambda;\phi,\psi) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\lambda - ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx, \\ \displaystyle\int \frac{1}{\lambda - ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx + 2\pi\phi(i\lambda)\overline{\psi(i\lambda)} \end{cases}
$$

（1 行目は $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ のとき，2 行目は $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ のとき）によって R を定めると，これは λ について整関数となる．今，X を $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間であるクラスの整関数からなるものとし，X' を X の双対空間，すなわち X 上の連続線形汎関数全体がなすベクトル空間としよう．関数 $\phi \in X$ を選ぶごとに複素数値 $R(\lambda;\phi,\psi)$ が定まるから，写像 $\phi \mapsto R(\lambda;\phi,\psi)$ は X 上の線形汎関数を定める．この線形汎関数を $R(\lambda;\bullet,\psi)$ と表す．X の位相はこの線形汎関数が連続であるように選ばれているものとする．すると，写像 $\psi \mapsto R(\lambda;\bullet,\psi)$ は X から X' への線形写像 $\mathcal{R}_\lambda$ を定める．結局 $\mathcal{R}_\lambda(\psi)(\phi) = R(\lambda;\phi,\psi)$ であるが，定義の仕方から，λ が右半面にあるときは $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ である．そこで，$\mathcal{R}_\lambda$ を $\mathcal{M}$ の**一般化レゾルベント**と呼ぼう．今示したことをまとめよう：

$\mathcal{M}$ のレゾルベント $(\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ は，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への作用素だと思うと虚軸上で発散するが，X から X' への作用素だと思うと虚軸でも確定し，λ について（X'-値の）整関数である．

X は $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間であり，その埋め込みは連続であるとすると，$L^2(\mathbf{R})$ の双対空間は X' に連続的に埋め込める．ところが $L^2(\mathbf{R})$ は Hilbert 空間なので自分自身の双対と同型である．その同型対応を通して，

$$
X \subset L^2(\mathbf{R}) \subset X' \tag{10}
$$

なる空間の 3 つ組が得られる．これを **Gelfand の 3 つ組**，あるいは **rigged Hilbert space** という．

掛け算作用素を例にとって解説したが，以上のことは適当なクラスの作用素に対して行える[4]．一般に，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，A をその上の線形作用素とする．A のスペクトルとは，レゾルベント $(\lambda - A)^{-1}$ の特異点集合のことであった．A は連続スペクトルを持つと仮定しよう．上と同様の手続きにより，うまい空間 X を見つけることができて，X から X' への作用素としては $(\lambda - A)^{-1}$ が連続スペクトルを越えて解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ を持つことが示せたとする．するとこの解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ が，スペクトルとは異なる新たな特異点を持つかもしれない．これを**一般化スペクトル**と呼ぶことにする．定義上，一般化スペクトルは固有値とは異なるが，固有値と近い働きをすると考えられる．これが，関数方程式の解の挙動について，通常のスペクトル理論では分からなかった情報を提供してくれるのである．例として

$$
(A\phi)(x) = ix\phi(x) + K\int_{\mathbf{R}}\phi(x)dx \cdot g(x) \tag{11}
$$

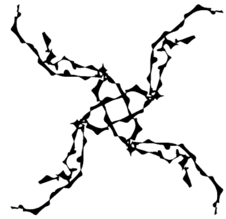
により $L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 A を定め，対応する発展方程式 (6) を考えよう．ここで $K > 0$ は定数であり，g は標準正規分布だとしておく（正則関数ならば以下の議論は可能である）．この形の積分方程式は，結合振動子系の研究においてしばしば現れる[5]．詳細は省くが，パラメータが $0 < K < \sqrt{2/\pi}$ を満たすとき，A のスペクトルは $\mathcal{M}$ のそれと同様に，虚軸のみからなることが示せる．したがって A は角域作用素ではないし，たとえそうだとしても虚軸上のスペクトルのため，定理 2 からは漸近挙動は分からない．そこで A の一般化スペクトルを計算してみると（すなわち，適当な正則関数 ϕ, ψ に対して $((\lambda - A)^{-1}\phi, \psi)$ とその解析接続を計算し，その特異点を探すと），左半面に可算無限個の一般化スペクトルが存在することが分かる．これと Laplace 逆変換の公式を用いると，(6) の解 $u(t)$ が X' の位相において指数的に減衰することが示せる．これは普通のスペクトル理論では分からなかったことである．ここでは紙面の都合で線形方程式のみを扱ったが，スペクトル理論，および一般化スペクトル理論は，非線形関数方程式の解析にも有効であり，今後様々な応用が期待される[2,5]．

参考文献

1) 藤田宏，伊藤清三，黒田成俊，『関数解析』，岩波書店 (1991).
2) D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer (1981).
3) W. Kerscher, R. Nagel, Asymptotic behavior of one-parameter semigroups of positive operators, *Acta Appl. Math.* **2** (1984), 297–309.
4) H. Chiba, A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under certain analyticity conditions (arXiv:1107.5858).
5) H. Chiba, I. Nishikawa, Center manifold reduction for a large population of globally coupled phase oscillators, *Chaos* **21**, 043103 (2011).

（ちば・はやと，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

古典場とフーリエ解析



磯崎　洋

1. 三角関数 = 振動 = 波

古典物理学は**ニュートン力学**から始まるとすべきであろう．これは空間の中の一つの点の運動を述べている．数学としては時間 t を変数とする関数の微分方程式（**常微分方程式**）を考えることになる．それはユークリッド空間の中では次の形をしている．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F\bigl(x(t)\bigr). \tag{1}$$

右辺の $F(x)$ は力を表すが，$F(x)$ を簡単なものから変えていくたびに基本的な関数が現れる．それは基本的な運動と対応している．

まず $F(x)$ が定数 c である場合を考えよう．このとき a, b を定数として

$$x(t) = \frac{ct^2}{2} + at + b$$

が (1) を満たしている．$x(t)$ を地面から測った高さと思えばこれは落体の法則を表している．

次に ω を正の定数として $F(x) = -\omega^2 x$ という場合を考えよう．このとき

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

は (1) を満たしている．バネの一端を原点に固定したとき，もう一方の端点はこのように書ける．これは振動を表している．

$F(x)$ を x の 2 次式にすれば $x(t)$ は**楕円関数**というものになるのだが，これは大学 1, 2 年の段階では高度な話題として扱われるから，これ以上立ち入らないことにしよう．

普通の力学の講義や教科書はさらに連続体の運動へと進む．弦の振動であったり，音波の伝播であったりするが，基本的な考え方は媒質の微小部分に (1) を適用することにある．そのため媒質の振動が三角関数によって表示されることになる．かくして

$$\text{三角関数} = \text{振動} = \text{波} \tag{2}$$

というイメージができ上がる．

微積分学と 1 変数の微分方程式，即ち常微分方程式とは表裏一体である．ニュートン力学の中には魅力的な題材が豊富にある．それを解くことによって微積分の運用法に習熟するのである．かくしてニュートン力学が数理物理学の基本的考え方として頭の中に定着する．連想 (2) もそうである．

しかし電磁気学に来てとまどうことになる．いつまで待っても (1) は現れない．媒質の振動は出てこないのである．そのうち基本方程式として**マックスウェルの方程式**が書き下される．そして電磁場の振動を伝える媒質 = **エーテル**は物理的に存在し得ないことが明らかにされる．波動方程式が組織的に考えられ出したのをベルヌーイやオイラーの時代にとれば，エーテルの非存在が共通認識となったのは 19 世紀後半であるから，200 年前後かかったことになる．

ニュートン力学においては（大きさのあるものを一つの点と見なすという理想化を行ってはいたが）現実の物体を眼にしていた．電磁場のように実体のないもの（哲学的議論は抜きにして，手に取って触れないもの，という程度に解釈しよう）を理解するにはこれまでの発想を変えなくてはならないであろう．

それを認めることに異論はないが，一旦マックスウェルの方程式が登場すると，電磁場は波動方程式に帰着され，三角関数を用いて解が記述される．やはりエーテルなしの振動は考えにくい．物理的エーテルは否定されたが，波動現象を媒質の振動から理解し始めるという物理の学び方は変わらないであろう．相変わらず「三

角関数 = 振動 = 波」なのである．ニュートン力学は奥深く影響し物理的エーテルは数学的エーテルとなって我々の頭の中で振動してはいないだろうか？ (2) とは異なる三角関数の認識の仕方はないだろうか？

2. 空間の一様性と三角関数

ユークリッド空間の中を歩き回ったとする．どこへ行ってもあたりの様子は変わらないであろう．このようなとき空間は**一様**であるという．空間の一様性を反映する関数はどのようなものであろうか？

直線上の各点 x ごとにある複素数 $f(x)$ が定まっているとする．$f(x)$ は x という点におけるある量を表しているとしよう．この量は直線の一様性を反映しているとしよう．そうすれば x から a だけ移動した点での値 $f(x+a)$ と $f(x)$ は絶対値が等しいであろう．すると $f(x+a)=g(x,a)f(x)$ ただし $|g(x,a)|=1$ と書ける．$g(x,a)$ は x から a だけ移動したときの変化を記述するのだが，空間が一様なのだから，$g(x,a)$ は x に無関係に a だけによって決まるであろう．そこで

$$f(x+a)=h(a)f(x) \tag{3}$$

と書ける．この式の両辺を a で微分して $a=0$ とおくと，

$$f'(x)=h'(0)f(x)$$

という微分方程式が得られる．これを解いて $f(x)=Ce^{h'(0)x}$ となる．C は定数である．ところが $f(x)$ は x によらずその絶対値が一定なのだから $h'(0)$ はある実数 k を用いて $h'(0)x=ik$ と書けなくてはならない．実際 $h'(0)$ が 0 でない実部をもてば $f(x)$ は $x\to\infty$ または $x\to-\infty$ のときに 0 になってしまう．よって

$$f(x)=Ce^{ikx},\quad k\in\mathbf{R}$$

となる．同様の考察を $\mathbf{R}^n$ 上で行えば $e^{i(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)}$ という関数が得られる．

上の議論の中に振動している媒質というものはない．用いているのは，ユークリッド空間がどこをとっても同じものである（一様である）ということと，$f(x)$ は平行移動しても絶対値が変わらないという性質だけである．ユークリッド空間そのものは振動してはいない．空間の一様性だけの条件から三角関数が現れるのである．

3. 場とは

数学でも物理でも**場**とは簡単にいえば関数を指していると思われる．場合によっては普通の関数のみならず，与えられた空間の中の点に見慣れない他の空間の中の点を対応させるものを扱うこともある．例えば空間の点ごとに 3 次元空間の中の 2 次元平面を対応させる関数を考えたりもする．関数の値が平面なのである．

このことだけを取り上げるならばニュートン力学も同じである．惑星の運動を考えるときには，時間のなす 1 次元空間の点に惑星の動く 3 次元空間内の点を対応させる関数を取り扱ったのである．

ニュートン力学はさらに発展して**解析力学**と呼ばれるものになった．例えば 1 点を固定した剛体の運動は 3×3 直交行列のなす空間内の点の運動と見なされる．そこで直交行列のなす空間内の曲線の接線とは何かというような考察が必要になる．このような幾何学的な用語で記述された力学が解析力学である．

解析力学の対象はあくまでも 1（時間）変数の（常）微分方程式である．しかし波の伝播等を考えるときには（多変数の）偏微分方程式が現れる．古典物理学における偏微分方程式を考えるときに，解析力学において用いられた方法（**ラグランジュ形式**や**ハミルトン形式**）を頼りにその類似物を作ることが有効であった．通常，古典場という言葉はこのような理論の組み立て方を念頭において語られるように思われる．

4. 物理が先か数学が先か？

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ に対して

$$\widehat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$$

をその**フーリエ変換**という．ここで

$$x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$$

である．次のフーリエの**反転公式**は解析学に現れる式のうちで最も美しいものの一つであろう：

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{4}$$

これを用いれば 1 次元の波動方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\\ u(0,x)=f(x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0\end{cases}$$

の解は

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} \cos(t|\xi|)\widehat{f}(\xi)d\xi,$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right)$$

という2通りの表し方ができる．今日では簡単なこの事実も初期の時代には随分議論を呼んだようである．

振動現象の解を三角級数を用いて表すことはすでにベルヌーイによって行われていた．しかし三角級数をベルヌーイ級数と呼ばずにフーリエ級数と呼ぶのは，フーリエがその著『熱の解析的理論』の中で三角級数を数理物理学の問題に組織的に用いたからである．

数学と物理学は時にあまりにもうまく融合して，どちらがより根本的なのか分からなくなることがある．特にこの波動現象においてその感がある．例えば波動方程式の解の式からフーリエの反転公式を導いてみよう．

まず $e^{ik(t\pm x)}$ は波動方程式を満たしていることに注意しよう．これらの関数を重ね合わせた

$$u_\lambda(t,x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos kt \cos k|x-y| f(y)dydk$$

もまた波動方程式の解である．この右辺を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda(t \pm |x-y|)}{|x-y|} f(y)dy$$

という2つの積分の和の形に書き換え，$\lambda \to \infty$ とすれば三角関数の性質から右辺は $\pi(f(x+t)+f(x-t))$ に収束することが分かる．これより

$$f(x+t) + f(x-t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(k+t)} + e^{i(k-t)}\right) \widehat{f}(k)dk$$

という式が出る．$t=0$ としたものがフーリエの反転公式である．

もちろん，上の証明の本質的な部分は表面には出て来なかった $\lambda \to \infty$ のときの三角関数の計算である．しかしその出発点は三角関数を重ね合わせて波を作ることができるという事実である．これは数学から来ることであろうか？ 物理から来ることであろうか？

5. 群構造を反映する関数

第2節における重要な式は (3) である．この式で x を $x+b$ にすると

$$h(a+b)f(x) = f(x+a+b)$$
$$= h(b)f(x+a) = h(b)h(a)f(x)$$

となる．両辺を $f(x)$ で割れば $h(a+b) = h(a)h(b)$ となる．(3) で $x=0$ とおき，簡単のために $f(0)=1$ としてさらに a, b の代わりに x, y と書けば

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{5}$$

となる．f は加法 $x+y$ を乗法 $f(x)f(y)$ に変えている．

場とはある空間上の関数のことであった．ユークリッド空間が平行移動に関して不変であることから $\mathbf{R}^1$ 上には e^{ikx} という空間の一様性を反映する関数が存在した．それは物理現象とよく符合するものであった．そしてこの関数によって任意の関数が展開できた．e^{ikx} は関数のなす空間の基底になっているのである．

平行移動は数学でいうところの**群**（group）をなす．上のような状況があるとき，ユークリッド空間には平行移動の群が作用しているという．ユークリッド空間でなくても群の作用に関して (5) のような良い性質をもつ関数を見つければ，同じように関数の空間の基底となり，物理的にも意味のあるものになっていないであろうか？ 例えば球面上ではこのことが可能である．球面は回転しても不変であるから，回転のなす群を元にして上のような議論ができる．このような数学は群の**表現論**と呼ばれる．

群の表現論はその外見からは純粋に数学の中だけの話のように思われる．しかし，これが素粒子を考える上で重要な役割を果たしているとは驚きである．

6. 少し数学を

先に進む前に少し準備をしておこう．フーリエ変換の重要な性質として微分を掛け算に変えるというものがある．即ち $(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ と書けば

$$\left(\mathcal{F}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_j\,(\mathcal{F}f)(\xi).$$

また

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$$

という性質もある．特に

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

である．

また $\mathbf{R}^n$ の中の領域 Ω 上で定義された関数 $f(x)$ が

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$$

を Ω の境界付近で0となるすべての関数 $\varphi(x)$ に対

して満たせば $f(x)$ は Ω 全体で 0 である．

ユークリッド空間の中の粒子の時間の区間 $[t_0, t_1]$ における運動を考えよう．粒子の座標は $x(t)$ という時間の関数である．$t = t_0, t_1$ のときの粒子の位置は $x(t_0)$, $x(t_1)$ である．$x(t_0), x(t_1)$ を固定しながら粒子の軌道を少し変えたとき積分値 $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)|^2 dt$ が極値になるように粒子が動くはずだ，というのが自由粒子に対する解析力学の基本原理である．そこで $t = t_0, t_1$ の近くで 0 となる関数 $z(t)$ を任意にとりパラメータ ϵ を導入して

$$I(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t) + \epsilon \dot{z}(t)|^2 dt$$

とおく．この関数は $\epsilon = 0$ のとき極値をとるから $dI(\epsilon)/d\epsilon\big|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{z}(t)dt = 0$ となる．部分積分を行えば

$$\int_0^1 \ddot{x}(t)z(t)dt = 0$$

が $t = 0, 1$ の近くで 0 となる任意の関数に対して成り立つ．よって $\ddot{x}(t) = 0$ だから $x(t)$ は t の 1 次式，即ち自由粒子の軌道は直線である．このような考え方を変分法という．

7. 場のラグランジュ形式

さて変分法と解析力学におけるラグランジュ形式を援用して波動方程式を導こう．$x_0 = t$ とおき，f を 4 変数 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ の関数のように書く．実数値関数のみを扱うことにしよう．場の**ラグランジュアン**とは次のような積分である：

$$\mathcal{L}(f) = \int \Big(|\partial_0 f(x)|^2 - \sum_{j=1}^{3} |\partial_j f(x)|^2\Big) dx.$$

ただし $\partial_j = \partial/\partial x_j$ であり，積分は $\mathbf{R}^4$ の中の有界領域上で行うものとする．古典場の理論においても，自由な場はラグランジュアンの極値を与えるものである，と考えてみよう．$\varphi(x)$ として Ω の境界近くでは 0 になる任意の関数によってラグランジュアンを少し変化させる．すると $J(\epsilon) = \mathcal{L}(f + \epsilon\varphi)$ は $\epsilon = 0$ で極値をとるはずであるから $dJ(\epsilon)/d\epsilon\big|_{\epsilon} = 0$，即ち

$$\int \Big(\partial_0 f(x)\partial_0\varphi(x) - \sum_{j=1}^{3} \partial_j f(x)\partial_j\varphi(x)\Big) dx = 0$$

である．部分積分すれば

$$\int \Big(\partial_0^2 f(x) - \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 f(x)\Big)\varphi(x) dx = 0$$

となり，$\varphi(x)$ は任意にとれるから，

$$\partial_0^2 f(x) - \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 f(x) = 0$$

が得られた．即ち自由古典場は波動方程式を満たしている．

上ではユークリッド空間の中で考えたが，近接した 2 点間の距離が $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx_i dx_j$ で与えられる空間，いわゆる**リーマン空間**でも同じようなことができる．そのときには波動方程式は

$$\partial_t^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u + c(x)u$$

という変数係数のものになる．このようなときには解を具体的に書き表すのは難しいが，例えば群が作用しているような場合にはそれが可能になることもある．また前節のような古典力学的変分法を行えば，極値を与える $x(t)$ はリーマン空間の中の光の道筋（2 点間の最短距離を与える曲線）になる．

8. ローレンツ計量

他の方程式も同じような考え方で導けないだろうか？そのために $a_{\alpha\beta}$ を定数として

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta u = 0$$

という方程式を考える．前節と同様の計算によって

$$-\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \int a_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha u\, \partial_\beta v\, dx$$

というラグランジュアンから出発すればよいことが分かる．方程式をフーリエ変換すれば

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \widehat{u}(\xi) = 0$$

である．波動方程式の場合には

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta = \xi_0^2 - \sum_{j=1}^{3} \xi_j^2$$

である．これは**ローレンツ計量**（または**ミンコフスキー計量**）と呼ばれるものである．このことは示唆的である．

複素ベクトルの場合も考慮して $\mathbf{C}^4$ の中に

$$(z, z') = z_0\overline{z_0'} + \sum_{j=1}^{3} z_j\overline{z_j'},$$

$$\langle z, z' \rangle = z_0\overline{z_0'} - \sum_{j=1}^{3} z_j\overline{z_j'}$$

という2つのスカラー積を考えよう．J をその対角成分が $1,-1,-1,-1$ で他が0である行列とすると

$$\langle x,x'\rangle=(Jx,x')$$

である．実線形写像 $x\to Tx$ がローレンツ変換であるとは

$$\langle Tx,Tx'\rangle=\langle x,x'\rangle$$

が任意の $x,x'\in\mathbf{R}^4$ に対して成り立つことである．これは

$${}^tTJT=J$$

と同値である．$\mathbf{R}^4$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\widetilde{f}(\xi)$ を

$$\widetilde{f}(\xi)=(2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{R}^4}e^{i\langle x,\xi\rangle}f(x)dx=\widehat{f}(-J\xi)$$

によって定義する．T をローレンツ変換とし $g(y)=f(T^{-1}y)$ とおく．g のフーリエ変換は

$$\widetilde{g}(\eta)=(2\pi)^{-2}\int e^{i\langle Tx,\eta\rangle}f(x)dx$$

であるが，$\eta=T\xi$ とおくと

$$\langle Tx,\eta\rangle=({}^tTJTx,\xi)=\langle x,\xi\rangle$$

であるから $\widetilde{g}(\eta)=\widetilde{f}(\xi)=\widetilde{f}(T^{-1}\eta)$ である．言い換えるとローレンツ変換した関数のフーリエ変換はフーリエ変換した関数のローレンツ変換である．よって $\widetilde{g}(\eta)$ も $(\eta_0^2-\sum_{j=1}^3\eta_j^2)\widetilde{g}(\eta)=0$ となるから，これをフーリエ逆変換すると $g(y)$ も波動方程式を満たす．即ち波動方程式はローレンツ不変である．

フーリエ変換を用いずに直接計算してももちろんローレンツ不変性は導かれる．しかしフーリエ変換によって定数係数の線形微分方程式が ξ を含む代数方程式に変わったことは重要である．特に連立方程式の場合には行列の構造を考える問題に変わる．マックスウェルの方程式はその良い例である．

9. マックスウェルの方程式

真空中の電場，磁場 E,H に対するマックスウェルの方程式は $\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ として

$$\nabla\times E=-\partial_0 H,\quad \nabla\times H=\partial_0 E,$$
$$\nabla\cdot E=0,\quad \nabla\cdot H=0$$

というものである．ただし光の速さを1とする座標系をとった．この方程式を変分法によって導きたい．通

常はベクトルポテンシャルを使うのだが，その議論の線形代数的意味を考える．

まずこの方程式をフーリエ変換する．記号を簡単にするために E, H のフーリエ変換 $\widetilde{E}, \widetilde{H}$ を E, H で表すことにする．簡単のために E, H は実数値として扱う．また $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ とし，4 次元ベクトルは $\vec{\xi} = (\xi_0, \xi)$ と書く．フーリエ変換によって

$$\partial_0 \to -i\xi_0, \quad \partial_j \to i\xi_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

となるから

$$\xi \times E = \xi_0 H, \quad \xi \times H = -\xi_0 E, \tag{6}$$

$$\xi \cdot E = 0, \quad \xi \cdot H = 0 \tag{7}$$

である．線形写像：$x \to \xi \times x$ に対応する行列を $\xi\times$ で表すことにすると 6×6 行列

$$\mathcal{M}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi\times \\ \xi\times & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値問題を考えることになる．方程式 (7) は固有ベクトルの成分 E, H が ξ に直交すべきことを意味している．そこで $H = \xi \times A$ とおけば $\xi \times H = 0$ は満たされる．E のほうは $E = \xi_0 A - A_0 \xi$ とおく．$\xi \times E = \xi_0 H$ も満たされる．$\xi \cdot E = 0$ を満たすためには

$$\xi_0 \, \xi \cdot A - |\xi|^2 A_0 = 0 \tag{8}$$

が成り立たなくてはならない．また $\xi \times H = -\xi_0 E$ が成り立つためには

$$(\xi \cdot A)\xi - |\xi|^2 A = -\xi_0^2 A + \xi_0 A_0 \, \xi$$

でなくてはならないが (8) を考慮すればこれは

$$\xi_0(\xi_0^2 - |\xi|^2)A = (\xi_0^2 - |\xi|^2)A_0 \xi$$

と書き換えられる．ここで特に

$$(\xi_0^2 - |\xi|^2)A_0 = 0 \tag{9}$$

が成り立つものとすれば，$(\xi_0^2 - |\xi|^2)A = 0$ である．4 次元ベクトル $\vec{A} = (A_0, A)$ を考えれば，これは

$$(\xi_0^2 - |\xi|^2)\vec{A} = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \vec{A} = 0 \tag{10}$$

を意味する．このとき (8) は

$$\xi_0 A_0 - \xi \cdot A = \langle \vec{\xi}, \vec{A} \rangle = 0 \tag{11}$$

と書き換えられる．

上ではマックスウェルの方程式を $\vec{A}$ で書き換えたが，今度は変分法でマックスウェルの方程式を導くことを考える．そのために $H = \xi \times A, E = \xi_0 A - A_0 \xi$ とおいて $|E|^2 - |H|^2$ を計算する．等式

$$|\xi \times A|^2 = |\xi|^2 |A|^2 - (\xi \cdot A)^2$$

を用いれば

$$|E|^2 - |H|^2 = \langle \vec{\xi}, \vec{A} \rangle^2 - \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle$$

となる．A を動かしたときこの値が極値となるような $\vec{A}$ の方程式を求めよう．$\vec{A}$ を極値を与えるものとして $\vec{A} + \epsilon \vec{B}$ を上の式に代入して ϵ で微分し $\epsilon = 0$ とおけば

$$\langle \vec{\xi}, \vec{A} \rangle \langle \vec{\xi}, \vec{B} \rangle - \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0 \tag{12}$$

が成り立つ．この式が任意の B に対して成り立つことと (10), (11) が同値であればいいのだが，ここで注意がいる．

(10), (11) から (12) が出ることは明らかである．逆に (12) が成り立っても (11) や (12) はすぐには出ない．そこで次のような工夫をする．新たに $\phi \in \mathbf{R}$ を導入し

$$\vec{A}^{\phi} = \vec{A} + \phi \vec{\xi} \tag{13}$$

とおく．このような操作を**ゲージ変換**という．$\vec{A}^{\phi}$ から作った E や H を E^{ϕ}, H^{ϕ} と書けば

$$E^{\phi} = E, \quad H^{\phi} = H$$

である．よって

$$\begin{aligned} |E|^2 - |H|^2 &= |E^{\phi}|^2 - |H^{\phi}|^2 \\ &= \langle \vec{\xi}, \vec{A^{\phi}} \rangle^2 - \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \langle \vec{A^{\phi}}, \vec{A^{\phi}} \rangle \end{aligned}$$

である．これに変分を行えば

$$\langle \vec{\xi}, \vec{A^{\phi}} \rangle \langle \vec{\xi}, \vec{B} \rangle - \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \langle \vec{A^{\phi}}, \vec{B} \rangle = 0 \tag{14}$$

が任意の $\vec{B}$ に対して成り立つ．そこでまず $B = 0$ とおくと

$$\langle \vec{\xi}, \vec{A^{\phi}} \rangle \xi_0 B_0 - \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle (A_0 + \xi_0 \phi) = 0.$$

ここまで ϕ には何の条件もなかった．そこで

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle (A_0 + \xi_0 \phi) = 0 \tag{15}$$

が成り立つように ϕ を定める．このとき

$$\langle \vec{\xi}, \vec{A^{\phi}} \rangle = 0$$

が成り立つ．そこで (14) に戻れば

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle \vec{A^{\phi}} = 0$$

が成り立つ．よって (10), (11) と (12) はゲージ変換を許せば同値である．

フーリエ逆変換すれば次の結論を得る．ベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{x}) = (A_0(\vec{x}), A(\vec{x}))$ によって $H = \nabla \times A$, $E = -\partial_0 A - \nabla A_0$ とし変分法を適用すれば積分 $\int \left(|E|^2 - |H|^2\right) dx$ の極値を与える E, H はマックスウェルの方程式を満たす．ただしゲージ変換 $\vec{A} \to \vec{A} + (-\partial_0\phi, \nabla\phi)$ をほどこす必要がある．ここで ϕ は適当な波動方程式 $(\partial_0^2 - \Delta)\phi = f$ の解である．

交代テンソル

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

を成分とする 4×4 行列を F とすれば上の変分は実は

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\left({}^t FJF\right) dx$$

に対するものであることが示される．またマックスウェルの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}F_{\lambda\mu} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu}F^{\lambda\nu} = 0, \quad (F^{\mu\nu}) = J\,(F_{\mu\nu})$$

という形に書き換えられることも知られている．このようなテンソルに関する変分は微分幾何学でよく行われる．上のような式が微分幾何学に現れる式に類似するのも不思議ではない．

数学や物理を学ぶときには，まず具体的なものを理解することから始まる．しかしある時点で「ものの見方」を変えることが要求される．見る眼がなければ先は見えない．古典場の理論は我々を見晴らしの良い眺望台へと導く学問である．

参考文献

1) 磯崎洋,『数理物理学における微分方程式』, 日本評論社 (2000).
2) ゴールドスタイン,『古典力学』, 吉岡書店 (1968).
3) ランダウ・リフシッツ,『場の古典論』, 東京図書 (1969).
4) 高橋康・柏太郎,『場の解析力学入門』, 講談社 (1982).
5) 島和久,『連続群とその表現』, 岩波書店 (1981).
6) 平井武,『線形代数と群の表現 I, II』, 朝倉書店 (2001).
7) ヘルマン・ワイル,『空間・時間・物質』, 講談社 (1973).

第 4 節におけるフーリエ変換の話は 1) の第 3 章からとった．2), 3) は解析力学と古典場の理論の標準的教科書である．4) は量子場の理論を意識した古典場の理論の解説である．5), 6) は表現論の本であるが，素粒子論への応用も書かれている．7) は名著とされているが難解である．しかし何度も読破を試みる価値がある．

（いそざき・ひろし，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

量子力学と関数解析

廣島 文生

1. 行列力学と波動力学…量子力学の夜明け

1925, 6 年頃ハイゼンベルクの行列力学とシュレディンガーの波動力学がほとんど同時にでき上がり，それらが形式的に同等であることが発見された．この量子力学を数学的に再構成したのは若きフォン・ノイマンである．1932 年彼が 29 歳のとき『Die mathmatische Grundlagen der Quantenmechanik』[*1] を著し，公理論的基礎の上に現代数学的な手法を用いてヒルベルト空間論を展開し 20 世紀の解析学に新しい時代を画した．驚くべきことにこの金字塔ともいえる著書は彼の 26 歳のときの長大な論文[10]が基礎になっている．それ以降，関数解析学と量子力学は一心同体となって互いに刺激しあい 20 世紀に大きな発展を遂げた[*2]．

量子力学の基本原理である**正準交換関係**（Canonical Commutation Relation=CCR）について考えよう．CCR は

$$[P, Q] = -i\hbar \tag{1}$$

と表される．ここで $[A, B] = AB - BA$, $\hbar = h/2\pi=$ プランク定数 $/2\pi$ である．この原理に初めて気がついたのはハイゼンベルクである．(1) を行列で表現してみよう．つまり n 次正方行列 P, Q で $PQ - QP = -i\hbar I_n$ となるものを探すのである．しかしすぐにそのような行列が存在しないことがわかる．両辺の行列の対角成分の和を考えてみればいい．右辺は $-i\hbar n$ であり左辺は PQ の対角成分の和と QP の対角成分の和の差であるが，ともに値が等しいのでゼロになってしまう．そこで無限次元正方行列を考えてみる．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & & \cdots \\ & \sqrt{2} & 0 & \\ \vdots & & \sqrt{3} & \ddots \end{pmatrix}$$

とすれば，転置行列は

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ & & 0 & \sqrt{3} \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，形式的に $[A^*, A] = I$ が成り立つ．よって $P = -i\hbar(A^* - A)/\sqrt{2}$, $Q = (A^* + A)/\sqrt{2}$ とおけば $[P, Q] = -i\hbar I$ が従う．ハイゼンベルクは量子系のハミルトニアンはエルミート行列 $H = H(P, Q)$ で与えられ，その固有値がエネルギー準位を与えること，および物理量 W の時間発展は**ハイゼンベルク方程式**

$$\frac{d}{dt}W_t = \frac{i}{\hbar}[H, W_t], \quad W_0 = W \tag{2}$$

に従うと考えた．行列力学の誕生である．一方，1923 年ド・ブロイは光において見出されていた波動と粒子の二重性を注意深く考察し，大胆にもその二重性は光だけでなく電子のような物質粒子にも存在すると考え，量子論における不連続性は電子波の干渉の一種であると考えた．この考えはシュレディンガーによって発展させられ，電子波の満たすべき方程式

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V(x))\psi = 0 \tag{3}$$

が発見された．$p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$ と $q_k = x_k$ が現れ，これらは線形作用素として $[p_j, q_k] = -i\hbar\delta_{jk}$ を満たす．さらにシュレディンガーはハイゼンベルクの発見した行列力学が自分自身のものと同値であることに気づいたのである．このことを見るためには抽象的な枠組み

---

*1) 邦訳『量子力学の数学的基礎』みすず書房（1957）．

*2) 執筆に際し九州大学の高瀬正仁先生に有益なご意見を頂きました．ここに謝意を表します．

が必要である．次節でこれをみてみよう．

2. 正準交換関係とヒルベルト空間論

2.1 非有界作用素

抽象的に量子力学を定式化することは，これから概観するように，可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上にCCRの表現を与えることに他ならない．ディラック・ヨルダンの変換理論を経て，最終的にはフォン・ノイマンによってヒルベルト空間上の非有界作用素の代数としてまとめられた．その抽象的な代数構造であるCCRを具体的に表現したものが量子力学である．ハイゼンベルクが発見した行列力学は2乗級数和が有界になる数列全体の空間 l^2 上へのCCRの表現であり，シュレディンガーのそれは2乗可積分な関数全体の空間 L^2 上のCCRの表現であった．これらは同値な表現であり，記述の外見が異なっていても数学的には全く同じものである．

内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義された線形位相空間 $\mathcal{H}$ を考える．この内積から決まるノルム $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ で位相を入れる．この位相で完備[*3]なとき $\mathcal{H}$ を**ヒルベルト空間**という．さらにたかだか可算無限個の元からなる部分集合 D でその有限線形和全体 $\mathcal{L}(D)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であるようなものが存在するとき $\mathcal{H}$ は可分であるという．可分であれば $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．つまり $f\in\mathcal{H}$ は $f=\sum_{n=1}^{\infty}(\phi_n,f)\phi_n$ のように一意的に展開できる．このことからすべての可分なヒルベルト空間は l^2 に同型であることが分かる．

線形作用素 A の共役作用素 A^* を定義しよう．$\mathcal{D}(A)$ は A の定義域を表し，本稿で現れる作用素はすべて稠密に定義されているものとする．さてすべての $g\in\mathcal{D}(A)$ に対して $(f,Ag)=(h_f,g)$ となる h_f が存在するとき，対応 $f\to h_f$ を A^* と書いて A の共役作用素という．さらに $A^*=A$ のとき**自己共役作用素**という．

定義1（CCRの表現[1]） 可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 P_j, Q_k が稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ 上で $[P_j,Q_k]=-i\hbar\delta_{jk}$, $[P_j,P_k]=[Q_j,Q_k]=0$ を満たすとき $(\mathcal{H},\{P_j\},\{Q_k\},\mathcal{D})$ をCCRの表現という．

抽象的な世界では，$[P,Q]=-i\hbar$, が基本原理となっている．しかし $[P,Q]$ は反対称であるから，抽象的には $[P,Q]=iR(\hbar)$, $R(\hbar)$ 自己共役，でもかまわない．量子力学はその第一近似の表現と考えることもできる．

*3） 任意のコーシー列が収束列になる位相空間．

CCRからすぐに次が示せる．

定理1（不確定性原理） $\Delta_f P=\|Pf-(f,Pf)f\|^2$ とすれば $\Delta_f P_j\cdot\Delta_f Q_k\geq\frac{1}{2}|(f,[P_j,Q_k]f)|$ となる．

これは**ロバートソンの不等式**と呼ばれ，不確定性原理の一種である[5]．さて，定数 C があってすべての $f\in\mathcal{D}(T)$ に対して $\|Tf\|\leq C\|f\|$ を満たす作用素を**有界作用素**という．有界作用素の定義域は一意的に $\mathcal{H}$ 全体に拡張でき，また $f_n\to f$ ならば $Tf_n\to Tf$ なので連続な作用素でもある．逆に連続な作用素は有界作用素であることが示せる．有界でない作用素を**非有界作用素**という．

定理2（CCRの非有界性） $[P,Q]=-i\hbar$ のとき P,Q のうち少なくとも一つは非有界である．

この定理によりCCRの表現を関数解析的に取り扱うためには必然的に非有界作用素の解析が必要となる．

2.2 スペクトル測度

P_j, Q_k で量子系のハミルトニアンを

$$H=H(P,Q)=\frac{1}{2m}P^2+V(Q) \tag{4}$$

として定義するために，与えられた自己共役作用素 A の関数 $F(A)$ を定義したい．そこで**スペクトル測度**が導入される．ここで測度論を簡単に復習しておこう．$\mathbb{R}^d$ の部分集合族 $\mathcal{B}$ が (1)–(4) を満たすとき**シグマ代数**という．(1) $\emptyset\in\mathcal{B}$, (2) $B\in\mathcal{B}\Longrightarrow B^c\in\mathcal{B}$, (3) $A,B\in\mathcal{B}\Longrightarrow A\cap B\in\mathcal{B}$, (4) $B_n\in\mathcal{B}, B_n\cap B_m=\emptyset\Longrightarrow\cup_n B_n\in\mathcal{B}$.

定義2（測度） 写像 $\mu:\mathcal{B}\to[0,\infty)$ が以下を満たすとき測度という．(1) $\mu(\emptyset)=0$, (2) $B_n\in\mathcal{B}$, $B_n\cap B_m=\emptyset\Longrightarrow\mu(\cup_n B_n)=\sum_n\mu(B_n)$.

$\mathbb{R}^d$ 上にシグマ代数 $\mathcal{B}$ と測度 μ が定義されると積分が定義できる．任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((-\infty,a))\in\mathcal{B}$ となるとき f をボレル可測関数という．まずステップ関数 $F(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n 1_{B_n}(x)$, $B_n\cap B_m=\emptyset$ に対して $\int F(x)d\mu(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\mu(B_n)$ と定義して，一般のボレル可測な正値関数 F に対しては各点で単調増加するステップ関数の列 F_n が取れるので $\int F(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int F_n(x)d\mu(x)$ で定める．

定義3（スペクトル測度） $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族 $\{E_O\}_{O\in\mathcal{B}}$ が次を満たすときスペクトル測度という．
(1) $E_\emptyset=0$, $E_{\mathbb{R}}=I$, (2) $E_AE_B=E_{A\cap B}$,
(3) $B=\cup B_n$, $B_n\cap B_m=\emptyset\Longrightarrow E_B=\sum_{n=1}^{\infty}E_{B_n}$.

スペクトル測度が与えられると $E_{fg}(O) = (f, E_O g)$ は複素数値測度になる[*4)].

定理 3（スペクトル分解定理） 自己共役作用素 A に対して，次を満たす $\mathbb{R}$ 上のスペクトル測度が一意的に存在する：

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int \lambda^2 dE_{ff}(\lambda) < \infty \right\},$$

$$(f, Ag) = \int \lambda^2 dE_{fg}(\lambda).$$

実はこのスペクトル測度に A のすべての情報が含まれている．A を考察することは究極的にはスペクトル測度を完全に調べ上げることに対応する．さてエルミート行列 A が $A = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$ のように $P_j^2 = P_j$ を満たす行列と固有値 λ_j で表せることはすぐにわかる．このとき任意の多項式 F に対して $F(A) = \sum_{j=1}^n F(\lambda_j) P_j$ となる．自己共役作用素の関数はこれの拡張である．

定義 4（自己共役作用素の関数） ボレル可測な関数 F に対して $F(A)$ を次のように定める：

$$\mathcal{D}(F(A)) = \left\{ f \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int |F(\lambda)|^2 dE_{ff}(\lambda) < \infty \right\},$$

$$(f, F(A)g) = \int F(\lambda) dE_{fg}(\lambda).$$

このように定めると例えば素朴に $A^n = \overbrace{A \cdots A}^{n}$ を定義した場合と $F(x) = x^n$ に対してスペクトル測度を用いて $F(A)$ を定義した場合の関係が気になる．実際は $A^n \subset F(A)$ となる[*5)]．つまりスペクトル測度で定義した場合は素朴な定義よりも定義域が広がる．例えば e^{iA} を素朴に定義しようとすれば，幾何級数展開して $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(iA)^n$ としたくなる．この場合の定義域は $\cap_n \mathcal{D}(A^n)$ より広くはない．しかしスペクトル測度を使って定義すれば $(f, e^{iA}g) = \int e^{i\lambda} dE_{fg}(\lambda)$ であるから，定義域は $\mathcal{H}$ 全体に広がる．

2.3 可換な自己共役作用素

2 つの有界な作用素 A, B が**可換**とは $AB = BA$ が成立することである．有界作用素の定義域は $\mathcal{H}$ 全体であるから $AB = BA$ は $\mathcal{H}$ 全体で成立している．非有界作用素の可換性は定義域の問題があるので有界作用素のようには定義できない．そこで $e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}$ となるとき A と B が可換と定義する．こうすれば e^{itA}, e^{isB} は有界作用素なので定義域の問題はない．さて可換な自己共役作用素のスペクトル測度 E^A, E^B も可換になるので $E_{fg}(O_1, O_2) = (f, E^A_{O_1} E^B_{O_2} g)$ が $\mathbb{R}^2$ 上の複素数値測度になる．

定義 5（可換な自己共役作用素の関数） 可換な A, B の関数 $F = F(A, B)$ を次のように定める：

$$\mathcal{D}(F) = \left\{ f \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int |F(\lambda, \mu)|^2 dE_{ff}(\lambda, \mu) < \infty \right\},$$

$$(f, Fg) = \int F(\lambda, \mu) dE_{fg}(\lambda, \mu).$$

互いに可換な n 個の非有界作用素の関数に対しても同様に定義する．$\{P_j\}$, $\{Q_j\}$ はそれぞれ可換な作用素の組であるから (4) の $H = H(P, Q)$ はスペクトル測度を用いて定義できる．これが抽象的な**シュレディンガー作用素**である．このときシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varphi_t = H \varphi_t$$

で定義され，H が自己共役であれば，その解は $\varphi_t = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \varphi_0$ となる．また物理量 W の期待値は $(\varphi_t, W\varphi_t)$ のように時間発展するので，次のハイゼンベルク方程式を満たす：

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t, W\varphi_t) = \frac{i}{\hbar}(\varphi, [H, W_t]\varphi).$$

ただし $W_t = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} W e^{i\frac{t}{\hbar}H}$ である．これで (2) と (3) の同値性が理解できた．また量子系では $e^{-i\frac{t}{\hbar}H}$ がベクトルの時間発展を，$e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \cdot e^{i\frac{t}{\hbar}H}$ が物理量の時間発展を与えることになる．一般に H の自己共役な拡大は無数に存在する．量子系を定義するときにはどの自己共役拡大を採用するかを明確にしなければならない．なぜならば $e^{itK} = e^{itH} \iff H = K$ なので自己共役作用素と系の時間発展が 1 対 1 に対応しているからである．

2.4 シュレディンガー表現と非同値表現

CCR の表現の一つを構成しよう．2 乗可積分な $\mathbb{R}^3$ 上の関数全体を $\mathcal{L}^2$ で表す．ただし，ここでの積分はルベーグ積分の意味であり，リーマン積分で定義すると上手くいかない．$\mathcal{L}^2$ に次のような同値関係 $\sim$ を導入する．$f \sim g$ とは $f(x) \neq g(x)$ となる点 x 全体のルベーグ測度がゼロ．この同値類で $\mathcal{L}^2$ を割った商空間を $L^2 = \mathcal{L}^2/\sim$ とし，L^2 の元を $[f]$ と書く．L^2 は内積 $([f], [g]) = \int \bar{f}(x) g(x) dx$ で可分なヒルベルト空間になる．$[f]$ を f で表そう．さて L^2 上に CCR

---

*4) 恒等式 $(f, E_B g) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^4 i^n((f+ig), E_B(f+ig))$ を用いて複素数値測度を定義する．

*5) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ かつ $Af = Bf, f \in \mathcal{D}(A)$ となること．

の表現を構成するわけだが $p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$, $q_k = x_k$ とすれば $[p_j, q_k]f = -i\hbar f$ が適当な f で成立するのはすぐにわかるが自己共役作用素の組で厳密にCCRを満たすものを構成するのは少々厄介である．詳細は省略するが，C_0^∞ を台がコンパクトな無限回微分可能な関数の集合とすれば，実は $p_j\lceil_{C_0^\infty}, q_j\lceil_{C_0^\infty}$ はただ一つの自己共役拡大を持つことが知られている．その拡大を改めて p_j, q_k と書いて4つ組 $\{L^2, p_j, q_k, C_0^\infty\}$ を**シュレディンガー表現**という．この表現で(4)のハミルトニアン H は次のように表せる：

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\Delta + V(x). \tag{5}$$

フォン・ノイマンは次の偉大な定理を示した．

定理 4（一意性定理）CCRの表現 $\{\mathcal{H}, \{P_j\}, \{Q_k\}, \mathcal{D}\}$ がワイル関係式 $e^{itP_j}e^{isQ_k} = e^{its}e^{isQ_k}e^{itP_j}$, $e^{itP_j}e^{isP_k} = e^{isP_k}e^{itP_j}$, $e^{itQ_j}e^{isQ_k} = e^{isQ_k}e^{itQ_j}$ を満たすならば，シュレディンガー表現に同値である[*6]．

この定理によりワイル関係式を満たせば，$U^{-1}P_jU = p_j$, $U^{-1}Q_kU = q_k$ となるユニタリー $U : L^2 \to \mathcal{H}$ が存在する．もちろんワイル関係式を満たせばCCRを満たすことはわかるが，CCRを満たしてもワイル関係式を満たすとは限らない：

$$\begin{array}{lcl} \text{ワイル関係式} & \Longrightarrow & \text{CCR}, \\ \text{CCR} & \not\Longrightarrow & \text{ワイル関係式}. \end{array}$$

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ 上にベクトルポテンシャル $A = (A_1, A_2)$ を定め，A から決まる磁場が $a_1, ..., a_n$ にデルタ関数的に集中しているとする．$P_j = p_j - A_j$ とする．適当な条件で P_j, q_k がCCRは満たすがワイル関係式を満たさないことがある．つまり $(L^2, \{P_j\}, \{q_k\}, C_0^\infty(M))$ でシュレディンガー表現と非同値なものが存在する．この事実と**アハラノフ・ボーム効果**の興味深い関係が知られている[1,9]．

3. スペクトル解析

3.1 スペクトル

有限次元空間上の線形作用素は行列で表現される．$A - aI$ が逆行列をもたないとき $a \in \mathbb{C}$ を A の固有値といった．$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素のスペクトルはこの拡張になっている．自己共役作用素 A の値域 $R(A)$ はいつでも稠密である．$A - a$ が単射であり，$(A-a)^{-1}$ は $R(A-a)$ 上で有界であるとき，a は**レゾルベント集合**に属するといい，レゾルベント集合を $\rho(A)$ で表す．$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ を A の**スペクトル**という．A のスペクトルは次のように分類される．

定義 6（スペクトルの分類 I） (1) $A - a$ が単射でないとき，a は点スペクトルに属するという．(2) $A - a$ が単射で $(A-a)^{-1}$ が $R(A-a)$ 上で非有界であるとき，a は連続スペクトルに属するという．

$\sigma(A)$ の孤立点は A の固有値になっている．

定義 7（スペクトルの分類 II） (1) $\sigma(A)$ の孤立点で A の固有値としての縮退度が有限であるもの全体を離散スペクトルという．(2) 離散スペクトル以外のスペクトルを A の真性スペクトルという．

$a \in \sigma(A)$ が真性スペクトルに属するためには集積点であるか，縮退度無限大の孤立点であるかのどちらかである．

3.2 離散スペクトル

シュレディンガー表現でハミルトニアン H は(5)であった．$H_0 = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\Delta$ のスペクトルは真性スペクトルだけからなり $\sigma(H_0) = [0, \infty)$ である．$V(x)$ が $|x| \to \infty$ でゼロに収束して，連続であれば H の真性スペクトルは H_0 のそれと一致する．つまり H の真性スペクトルは $[0, \infty)$ である．上の条件に加えて $V \leq 0$ を仮定しよう．このとき $\sigma(H) = \{E_j\} \cup [0, \infty)$ のようになる．固有値 $E_j \leq 0$ の個数 N （縮退している場合は縮退度を個数に込める）は古典的な相空間

$$\{(p, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 | |p|^2/2m + V(x) \leq 0\}$$

の体積 $\frac{3\pi}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(-(2m)V(x))^{3/2}dx$ だけ存在すると期待されている．実際 a という V によらない定数が存在して

$$N \leq a\int_{\mathbb{R}^3}(-(2m)V(x))^{3/2}dx$$

が示され，リープ・ティリング不等式と呼ばれている．右辺が1より小さければゼロ以下の固有値が存在しないことになる．次元が $d = 1, 2$ のときは，一般的な V で少なくとも一つは負の固有値を持つことが知られているので，この不等式は成立しない．また N を固有値のモーメント $\sum_j |E_j|^\alpha$ に置き換えることもできる．N は $\alpha = 0$ の場合に対応している．一般の場合には $-V$ の指数は $d/2 + \alpha$ になる．

*6) 厳密にはシュレディンガー表現の直和に同値になる．

表1　スペクトルの分類.

分類 I	点スペクトル	連続スペクトル
分類 II	離散スペクトル	真性スペクトル
分類 III	特異スペクトル	絶対連続スペクトル

3.3 絶対連続スペクトルと散乱理論

連続なスペクトルの様子をみよう．H のスペクトル測度 $(f, E_\lambda f)$ がルベーグ測度に関して絶対連続（特異）*7) になるとき f は H に関して**絶対連続**（**特異**）であるという．H に関して絶対連続（特異）な $f \in \mathcal{H}$ 全体を $\mathcal{H}_{ac}$ $(\mathcal{H}_s)$ で表せば $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$ のように直和分解できる．さらに $H_{ac} = H\lceil_{\mathcal{H}_{ac}}$, $H_s = H\lceil_{\mathcal{H}_s}$ とすれば

$$H = H_{ac} \oplus H_s$$

のように直和分解できる．この分解からリーマン・ルベーグの定理により $g \in \mathcal{H}_{ac}$ に対して

$$\lim_{t \to \pm\infty} (f, e^{-itH} g) = \int e^{-it\lambda} dE_{fg}(\lambda) = 0 \quad (6)$$

が示せる．(6) は $e^{-itH}g$ が時間無限大で，任意のベクトルと直交していることを述べており，散乱状態を記述している．

定義 8（スペクトルの分類 III）(1) $\sigma(H_{ac})$ を絶対連続スペクトルという．(2) $\sigma(H_s)$ を特異スペクトルという．

$f \in \mathcal{H}$ の時間発展を考える．漸近的に自由に振る舞うと思えば $e^{-itH}f - e^{-itH_0}f_0 \to 0 (t \to \infty)$ となる f_0 があるだろう．この f_0 を f の**漸近状態**という．e^{-itH} がユニタリーであるから，$f_0 = \lim_{t\to\infty} e^{itH} e^{-itH_0} f_0$ とみなすことができて

$$W_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

を**波動作用素**という．波動作用素はもっと一般的な組 A と B に対して定義できる．この場合 A の固有ベクトル上では $e^{itB}e^{-itA}f = e^{it(B-E)}f$ となり $t \to \infty$ で収束しないので，一般には A の絶対連続部分に制限して波動作用素を定義する．いまの場合は $H_0 = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\Delta$ なので，そのスペクトルはすべて絶対連続である．もう一つ特筆すべき性質をあげておく．

*7) 測度 μ がルベーグ測度に絶対連続とは $|\triangle|_L = 0 \Longrightarrow \mu(\triangle) = 0$. 測度 μ がルベーグ測度に特異とは $|\triangle|_L = 0$ かつ $\mu(\mathbb{R} \setminus \triangle) = 0$ となる $\triangle$ が存在すること．

$W_+ e^{-isH_0} = e^{-isH} W_+$ となるので，両辺を s で微分すれば $HW_+ = W_+ H_0$ が従う．$R(W_\pm) = \mathcal{H}_{ac}$ となるとき**完全**であるという．$W_\pm$ が完全なとき $W_+ : L^2 \to \mathcal{H}_{ac}$ はユニタリーになり $W_+ H_0 W_+^* = H$ から H_{ac} と H_0 が同型になることが分かる．波動作用素の完全性はかなり一般的な条件の下で知られている．

3.4 一般固有関数展開と一般化されたフーリエ変換

ハミルトニアンのスペクトルが純粋に点スペクトルだけからなるならば，その固有ベクトル全体はヒルベルト空間の基底になり，$f \in \mathcal{H}$ はその基底で展開できる．実は固有ベクトルの概念を一般化することにより絶対連続な部分も同様の展開が可能である．これを見てみよう．計算を簡単にするために $H_0 = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\Delta$ を $-\Delta$ で置き換える．$\varphi_0(x, \xi) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\xi x}$ とすれば $H_0 \varphi_0(x, \xi) = |\xi|^2 \varphi_0(x, \xi)$ が成立する．$\varphi_0(\cdot, \xi)$ は H_0 の固有関数系と思える．もちろんこの関数系は L^2 に属さない．ここで 3 次元のフーリエ変換 F を思い出してみよう：$Ff(\xi) = \int f(x) \bar{\varphi_0}(x, \xi) dx$．フーリエ変換は L^2 から L^2 へのユニタリー作用素に拡張できることが知られているから，

$$f(x) = \int \varphi_0(x, \xi) Ff(\xi) d\xi$$

となる．上の式はまさに $f \in L^2$ を非可算無限個の H_0 の固有ベクトル $\varphi_0(\cdot, \xi)$ で展開したように見える．いま H_0 にポテンシャル V を加えて $H = H_0 + V$ に対して**一般化された固有関数系**なるものを見つけたい．$\varphi = \varphi_0 + v$ として $H\varphi = |\xi|^2 \varphi$ とおけば**リップマン・シュビンガー方程式**

$$\varphi_\pm(x, \xi) = \varphi_0(x, \xi) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{\mp i|\xi||x-y|}}{|x-y|} V(y) \varphi_\pm(y, \xi) dy$$

を得る．波動作用素 $W_\pm$ が完全であれば $H_0 W_\pm^* = W_\pm^* H$ なのでフーリエ変換と合わせて，$F_\pm = FW_\pm^*$ とおけば $F_\pm H = |\xi^2| F_\pm$ となる．つまり H_{ac} が $|\xi|^2$ をかける作用素と同型となる．さらにレゾルベント $R(z) = (z - H)^{-1}$ の境界値で定義される関数

$$\varphi_\pm(\cdot, \xi) = \left(1 + VR(|\xi|^2 \pm i0)\right)^* \varphi_0(\cdot, \xi)$$

によって $F_\pm f(\xi) = \int f(x) \bar{\varphi}_\pm(x, \xi) dx$ と表され，$\varphi_\pm$ はリップマン・シュビンガー方程式を満たす．$F_\pm$ は $\mathcal{H}_{ac}$ から L^2 への等長作用素で $F_\pm \mathcal{H}_{ac}^\perp = 0$ になるから，$f(x) = \int \varphi_\pm(x, \xi) F_\pm f(\xi) d\xi$ となる．$\sigma(H)$ が N 個の点スペクトルと絶対連続スペクトルからなるとき，その固有ベクトルと固有値を ϕ_j, E_j と書けば

$$f = \sum_{j=1}^{N} (\phi_j, f)\phi_j + \int \varphi_\pm(\cdot, \xi) F_\pm f(\xi) d\xi,$$

$$Hf = \sum_{j=1}^{N} E_j(\phi_j, f)\phi_j + \int \varphi_\pm(\cdot, \xi)|\xi|^2 F_\pm f(\xi) d\xi$$

となり直感的な式が正当化される.

4. 経路積分

最後に**経路積分**について述べる. ファインマンが発見した経路積分[3]はそれまでの量子論の手法とは全く異なるものであった. 形式的な議論をしよう. $H(p,q)$ のラグランジアンは $L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$, で与えられる. ここで $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$. そうすると作用積分は $S(q_s, \dot{q}_s) = \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s) ds$ となり, 特に $C_{x,y}$ を x から y への経路全体の集合として

$$e^{-i\frac{t}{\hbar}H}(x,y) = C \int_{C_{x,y}} e^{\frac{i}{\hbar}S(q,\dot{q})} \mathcal{D}q$$

と書けるというのがファインマンの経路積分である. もちろん $\mathcal{D}q = \prod_{0 \le s \le t} dq_s$ に対応する数学的に厳密な測度が構成できるわけではない. ここで $t \to -it$ と形式的に置き換えてみると

$$e^{-\frac{t}{\hbar}H}(x,y) = C \int_{C_{x,y}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^t V(q_s)ds} e^{-\frac{m}{2\hbar}\int_0^t \dot{q}_s^2 ds} \mathcal{D}q$$

となり, 経路 q_s がいたるところ微分できないと思えば, 形式的には $e^{-\frac{m}{2\hbar}\int_0^t \dot{q}_s^2 ds}\mathcal{D}q = 0 \times \infty$ となるので, 経路空間上に有限な測度が構成できそうである. $\mathbb{R}^3$ 内の連続経路, つまり $[0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ の連続写像の空間を C とおく. $\omega_\cdot \in C$ としよう. C には次のような確率測度 P が存在している.

$$\int_C 1_{\omega_0=0}(\omega) dP = 1, \quad \int_C \omega_t \cdot \omega_s dP = \min\{t,s\},$$
$$\int_C \omega_t dP = 0, \quad \int_C e^{iu\cdot\omega_t} dP = e^{-tu^2/2}.$$

つまり経路は確率 1 でゼロから出発し, 共分散が $\min\{t,s\}$, 平均 0 のガウス過程である. $(\omega_t)_{t\ge 0}$ は**ブラウン運動**, P は**ウィナー測度**と呼ばれる.

定理 5 (ファインマン・カッツの公式) 虚数時間発展の作用素 e^{-tH} は次のように表すことができる:

$$e^{-tH}f(x) = \int_C f(\omega_t) e^{-\int_0^t V(\omega_s + x)dx} dP(\omega).$$

ファインマン・カッツの公式は多くのシュレディンガー型の作用素に対して知られている[2,7].

5. おわりに

本稿では抽象的なヒルベルト空間論から始めて, シュレディンガー作用素の点スペクトルと連続スペクトルにまつわる基本的な話題を紹介した. 賢明な読者はお気づきと思うが, 3 節に現れる数式は厳密なものではない. 厳密な記述は専門書に譲る[4,6].

量子力学の歴史を調べてみる. パウリ (1900 年生), ハイゼンベルク (1901 年生), ディラック (1902 年生), フォン・ノイマン (1903 年生)…らの 20 代の若者が革新的なアイデアを出し,「神様はサイコロを振らない」とのたまう重鎮たちに真っ向むかっていく姿に, 幕末の志士たちをダブらせてしまう. 通信手段も今とは比べ物にならないほど貧弱だった時代 (ニューヨーク–ロンドン間の電話開通が 1927 年) に若い人たちを中心に, ヨーロッパでどうしてこんなブレイクスルーが起きたのか? 本人たちに会って日本語で事情を聞いてみたいものである.

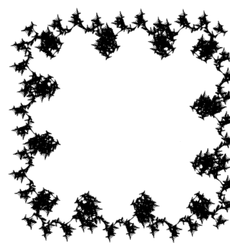
量子力学の話題は非常に多岐にわたっている. しかし関数解析学としての量子力学は 20 世紀中にほとんどすべて研究され尽くされた感もある. 夢を追い求めるような研究対象はあまり多くはないだろう. 20 世紀の成果をまとめたものに文献 8) がある. 興味のある読者は参照されたい.

参考文献

1) 新井朝雄,『量子現象の数理』, 朝倉書店, (2006).
2) 新井朝雄,『量子数理物理学における汎関数積分法』, 共立出版, (2010).
3) R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, (1965).
4) T. Ikebe, "Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger opperators and their application to scattering theory", *Arc. Ration. Mech.* **5**, (1960), 1–34.
5) 石井茂,『ハイゼンベルクの顕微鏡』, 日経 BP 社, (2006).
6) 黒田成俊,『スペクトル理論 II』, 岩波講座, 基礎数学, 岩波書店, (1979).
7) J. Lorinczi, F. Hiroshima, V. Betz, "Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space", *Studies in Mathematics* **34**, Walter de Gruyter, (2011).
8) B. Simon, "Schrödinger operators in the twentieth century", *J. Math. Phys.* **41** (2000), 3523–3555.
9) 外村彰,『目で見る美しい量子力学』, サイエンス社, (2010).
10) J.von Neumann, "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitschen Funktionaloperatore", *Math. Ann.* **102** (1929).

(ひろしま・ふみお, 九州大学大学院数理学研究院)

解析学で人工原子と光の物理に挑む！



廣川　真男

1. 序：解析学と物理学

本稿のタイトルは，NHK のある番組[2)]のそれを連想させるかもしれない．本稿への課題は「理工系学部学生の読者も想定し，マイクロエレクトロニクスと微分演算子との間の話題を紹介せよ」とのことなので，数理科学の中ではあまり知られていないテーマかもしれないが，筆者が解析学から今挑戦してみたい物理への数理科学的入り口を紹介してみたい．

自然界の原子と光との間の相互作用は量子電磁力学（QED）で説明され，その相互作用の強さは微細構造定数と呼ばれる無次元量 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ で与えられる．ここで，e は素電荷，ε_0 は真空誘電率，$\hbar$ は Planck 定数 h を 2π で割った定数，c は光速．一般に，相互作用の強さを表すパラメータを結合定数と呼ぶが，QED の電磁相互作用に対する結合定数が α で，摂動論が有効な領域に属するとして扱われる．1970 年代以降，鏡の共振器の中で原子と特定の単一モードの光とを相互作用させる共振器量子電磁力学（cavity QED）が発達していき，原子制御技術やレーザー技術の進歩に伴い，QED の世界では想像もしなかった強い相互作用の領域が実験的に実現された[3,4)]．さらに，21 世紀に入り cavity QED を超伝導回路で実現する回路量子電磁力学（circuit QED）が提案され[5)]，半導体集積回路技術や微細加工技術の進歩により，半導体基板上の超伝導回路で実際にそれは実現された[6~8)]．この circuit QED においては，cavity QED よりさらに強い相互作用の領域が実験で確認され興味深い物性が報告されている[9)]．この強い結合領域に関する数理科学の非摂動論的問題のある一つの側面を紹介してみたい．以下，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする．

2. 準備：波動方程式を廻って

Maxwell に従うと光は電磁波であり，その電磁波の各空間座標成分は，真空中で電磁場の変位が伝わる横波として波動方程式をみたす．時間 $t \in \mathbb{R}$ と位置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し，一定な速度 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ の波の変位を表す波動関数 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ を決定する波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^2 \Delta\phi(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

を，今，直方体 $V = [0,L_1] \times [0,L_2] \times [0,L_3]$ で伝わる波として，周期性境界条件 $\phi(t,\boldsymbol{0}) = \phi(t,\boldsymbol{L})$, $\nabla\phi(t,\boldsymbol{0}) = \nabla\phi(t,\boldsymbol{L})$ と初期条件 $\phi(0,\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $\frac{\partial}{\partial t}\phi(0,\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ の下で考え，その解 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ を平面波展開してみる．ただし，$\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3)$, $L_j > 0$ で，$f(\boldsymbol{x})$ と $g(\boldsymbol{x})$ は十分滑らかな実数値関数．考える平面波の波動関数は $u_{\boldsymbol{n}}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{k_n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t)}$ とする．ここで，$\boldsymbol{k_n}$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k_n} = (\frac{2\pi}{L_1}n_1, \frac{2\pi}{L_2}n_2, \frac{2\pi}{L_3}n_3)$ で，$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$, $V = L_1L_2L_3$, $i = \sqrt{-1}$. 新たに関数 $\pi(t,\boldsymbol{x})$ を $\pi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\boldsymbol{x})$ で与え，これらの 2 つの関数を次のように展開する：

$$\begin{cases} \phi(t,\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{V}} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^3} e^{i\boldsymbol{k_n}\cdot\boldsymbol{x}} q_{\boldsymbol{n}}(t), \\ \pi(t,\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{V}} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^3} e^{-i\boldsymbol{k_n}\cdot\boldsymbol{x}} p_{\boldsymbol{n}}(t). \end{cases} \tag{2}$$

$f(\boldsymbol{x})$ と $g(\boldsymbol{x})$ の Fourier 係数を用いると，$q_{\boldsymbol{n}}(t)$ と $p_{\boldsymbol{n}}(t)$ は $e^{i\boldsymbol{k_n}\cdot\boldsymbol{v}t}$ と $e^{-i\boldsymbol{k_n}\cdot\boldsymbol{v}t}$ の線形結合として具体的に計算でき次の連立微分方程式を得る：

$$\frac{d}{dt}q_{\boldsymbol{n}}(t) = p_{\boldsymbol{n}}(t)^*, \quad \frac{d}{dt}p_{\boldsymbol{n}}(t) = -\omega_{\boldsymbol{n}}^2 q_{\boldsymbol{n}}(t)^*. \tag{3}$$

振動の伝播である波，その様子を決める分散関係は，角振動数 ω を波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の関数 $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$ とし

て表される．平面波の分散関係を考慮し*1)，角振動数 $\omega_{\boldsymbol{n}}$ を $\omega_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{k_n} \cdot \boldsymbol{v}$ で与えると，$u_{\boldsymbol{n}}(t, \boldsymbol{x})$ は

$$u_{\boldsymbol{n}}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\boldsymbol{k_n} \cdot \boldsymbol{x} - \omega_{\boldsymbol{n}} t)} \tag{4}$$

となる．つまり，特定の平面波 (4) の重ね合わせとして $\phi(t, \boldsymbol{x})$ の平面波展開を得る．このときの各平面波の振動を**基準振動**，波を基準振動に分解し分類したそのそれぞれを**モード**という．

Einstein は光電効果を説明するため波としての光に粒子性も持たせ光量子説を唱え，逆に de Broglie は電子等の物質粒子に波動性を見出した．角振動数 ω と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は波動性を特徴付ける量であるが，粒子性を特徴付ける量としてのエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ を考えたとき，粒子性と波動性とを繋げるのが Einstein–de Broglie の関係式 $E = \hbar\omega, \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ であり，古典論における波の分散関係を量子論におけるエネルギーと運動量ベクトルとの関係へと持ち上げる．量子論では，角振動数の‘角’を省略し単に振動数と呼ぶことがあるが，本稿でも以後これに従う．Einstein–de Broglie の関係式の下で，(4) の形の波動関数 $u(t, \boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)}$ は $u(t, \boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - Et)/\hbar}$ となる．すると，x_j-方向の運動量 p_j は固有関数を $u(t, \boldsymbol{x})$ とする微分演算子 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$ の固有値になる．そう，量子力学完成の暁には，古典力学から量子力学へ移行するための正準量子化により，運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を微分演算子 $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ で，位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は掛け算演算子 $\hat{q} = (x_1\cdot, x_2\cdot, x_3\cdot)$ で置き換えるのであった！ ここで，$x_j\cdot$ は x_j をかける掛け算演算子．エネルギー E は固有関数を $u(t, \boldsymbol{x})$ とする微分演算子 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ の固有値になる．Minkowski 空間上ではエネルギー E も微分演算子 $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ に置き換える．

保存力の場の中での質量 m の質点の持つ全エネルギー H に対する正準量子化を見ておく．H はハミルトニアンと呼ばれ，非相対論的運動エネルギー $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2$ とポテンシャル・エネルギー $V(\boldsymbol{x})$ の和で与えられる：$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{x})$．ここで，$V(\boldsymbol{x})$ は実数値関数で，質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ に対して $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = -\nabla V$ なる Newton の運動方程式が成り立つ．例えば，角振動数 ω_{ho} を持った質量 $m = 1$ の質点の作る 1 次元調和振動子の場合，その位置を $q = x \in \mathbb{R}$，運動量を $p = m\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \in \mathbb{R}$ と記すと，$V(x) = \frac{\omega_{\mathrm{ho}}^2}{2}x^2$ であるので，Newton の運動方程式から連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}q(t) = p(t)^*, \quad \frac{d}{dt}p(t) = -\omega_{\mathrm{ho}}^2 q(t)^* \tag{5}$$

を得る．ここで，あえて各右辺を複素共役で記した．H に正準量子化を施すと，非相対論的量子力学での全エネルギー $\hat{H}$ は，Schrödinger 演算子

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V} \tag{6}$$

となり，やはりハミルトニアンと呼ばれる．ここで，$\hat{V}$ は実数値関数 $V(\boldsymbol{x})$ をかける掛け算演算子．例えば，上述の 1 次元調和振動子の場合は，$\hat{H}(\omega_{\mathrm{ho}}) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega_{\mathrm{ho}}^2}{2}x^2\cdot$ となる．$V(x) \equiv 0$ のとき，$\hat{H}$ は自由 Schrödinger 演算子と呼ばれる．

古典力学のエネルギー保存の法則 $H = E$（定数）に正準量子化を施すと，

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

なる微分演算子の固有値問題を得るので，量子力学で全エネルギーの値を求める場合は (7) の固有値問題を解くことになる．微分演算子 (6) の作る偏微分方程式を見るために，(7) で E を $\hat{E}$ に置き換えれば，Schrödinger 方程式が得られる：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \boldsymbol{x}) = \hat{H}\phi(t, \boldsymbol{x}). \tag{8}$$

一般に，Schrödinger 方程式 (8) の解もまた波動関数と呼ばれるが*2)，その解の物理的意味を考えると，波動関数は状態関数とも呼ばれる[11]．$\hat{H}$ が観測量となるために，$\hat{H}$ に自己共役性が数学上要請されるので，時間発展の演算子 $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ が定義でき，$\phi_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{x}) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})$ とおくと，$\phi_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{x})$ は初期値を $\phi(0, \boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})$ とする Schrödinger 方程式 (8) の初期値問題の解となる．$\phi_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{x})$ は $\psi(\boldsymbol{x})$ の Schrödinger 描像と呼ばれる．Born の確率規則に従うと，量子力学において我々が実験観測できるのは波動関数自身でも演算子となる観測量自身でもなく，観測量 A が状態 $\phi_{\mathrm{S}}(t, \boldsymbol{x})$ に観測される期待値なので，理論として Schrödinger 描

*1) 波の同位相 2 点間の移動速度から平面波の分散関係を計算すると，$\omega = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}$ となる．分散関係は波の種類によって異なる．例えば，文献 10) の例 5.11 を見よ．特に，位相速度の速さを v_{ph} とすると，(4) で与えられる平面波の分散関係は $\omega_{\boldsymbol{n}} = v_{\mathrm{ph}}|\boldsymbol{k_n}|$ となる（光の場合は $\omega_{\boldsymbol{n}} = c|\boldsymbol{k_n}|$）ので，$u_{\boldsymbol{n}}(t, \boldsymbol{x})$ は位相速度に対する波動方程式 (1) の解である．

*2) 例えば，$\hat{H}$ が自由 Schrödinger 演算子のとき，固有値問題 (7) を解き得られる分散関係から，(4) の形の波動関数 $u(t, \boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)}$ が (8) の解になる．すなわち，自由ハミルトニアン $\hat{H}$ に対する Schrödinger 方程式の解は，分散関係 $\omega = \frac{\hbar\boldsymbol{k}^2}{2m}$ の波を表す．

像 $\phi_{\rm S}(t,\boldsymbol{x})$ を考えようが，$\hat{H}$ による A の Heisenberg 描像 $A(t)=e^{i\hat{H}t/\hbar}Ae^{-i\hat{H}t/\hbar}$ を考えようが構わなかったことを注意しておく[*3)]．

3. 1 モード光子と 2 準位人工原子

まず，1 モード光子について簡単に触れておく．現在の共振器技術により，単一の角振動数 $\omega_{\rm c}$ を持った光の定在波を共振器内に作ることができる．すると，連立微分方程式 (3) のモードのうち特別な一つのモードの光が共振器の中に定在する．このモードの光を量子化したものが 1 モード光子であり，共振器の中にその光子を閉じ込めたことになる．(3) と (5) を比較し類推できるように，光の粒子性は調和振動子と同じになる[*4)]．特に，circuit QED の場合は，光として回路上のマイクロ波を扱うので，光を 1 次元的に捉え (5) を (3) の特別なモードの場合と見なせる．そこで，$\omega_{\rm ho}=\omega_{\rm c}$ とし，(5) において位置 q と運動量 p に正準量子化を施し，波動関数の量子化を行う．このときの粒子性を如実に表す表現を 4 節で与える．

次に，2 準位人工原子も簡単に説明しておく．今，原子中の電子は原子核が作るポテンシャル・エネルギーに束縛され，その速度が遅くなり非相対論的扱いができるものとし，原子核の質量 M が電子の質量 m よりはるかに大きく，電子から見て原子核は座標系の原点に固定される近似表現が採用できるとする．例えば，原子核の電荷が Ze となる水素様イオンのハミルトニアン $\hat{H}$ が，$\hat{H}_{\boldsymbol{r}}:=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{r}}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$ で近似される表現である[*5)]．ただし，$\boldsymbol{r}$ は相対座標で，$\Delta_{\boldsymbol{r}}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$．$\hat{H}_{\boldsymbol{r}}$ のエネルギーの特徴は，下に有界となり，負のエネルギー部分には離散固有値が現れ，それらに付随した固有関数となる状態関数は束縛状態を表す．一番小さな値の離散固有値を基底エネルギー，その値に対応した固有関数を基底状態，その上にある離散固有値を下から順番に $n=1,2,\cdots$ として第 n 励起エネルギー，それらの各値に対応した固有関数を第 n 励起状態と呼ぶ．正のエネルギー部分には連続固有値が現れ，それらの値に付随した状態関数は散乱状態となる．そこで，我々が観測できるのは，束縛状態に対応した束縛エネルギーとする[*6)]．非相対論的量子力学において，原子のハミルトニアン $\hat{H}_{\rm atm}$ を記述する Schrödinger 演算子は同様なエネルギーの特徴を持つ[*7)]．現在のテクノロジーは，このエネルギーの特徴を人工的に作り出すことを可能とし，それを我々は**人工原子**と呼ぶ[2)]．

もし (人工) 原子の第 $N-1, N$ 励起エネルギー間に大きなギャップが有り，下の N 個の離散エネルギー固有値を物理的に安定な孤立系として扱うことができれば，原子をその孤立系のみに着目し議論できる．この孤立系を N **準位(人工) 原子**と呼ぶ．数学的には，その孤立系を作る状態の張る部分空間への直交射影演算子 P_N を用い，ハミルトニアンとして新たに $P_N\hat{H}_{\rm atm}P_N$ を考える訳であるが，これは $\mathbb{C}^N$ 上のエルミート行列とユニタリ同値になる．従って，特に，2 準位人工原子のハミルトニアンは $\mathbb{C}^2$ 上の 2×2 エルミート行列で表現され，4 節で与えるように，基底エネルギーと励起エネルギーの差 $\hbar\omega_{\rm a}$ を用いて記述できる．

コンデンサーとコイルを繋ぐ LC 共振回路を超伝導体で作ることでエネルギーに現れる超伝導ギャップ中に調和的な離散固有値を作り出せるが[*8)]，circuit QED では，LC 共振回路のコイルを Josephson 接合で置き換え非線形自己誘導をもたらし，その離散固有値を非調和的にする[8)]．そのとき，第 1, 2 励起エネルギー間のギャップがかなり大きくなり，安定した 2 準位人工原子を創ることができるので[*9)]，量子計算の量子ビットを実現するデバイスとしての期待も高い[15,16)]．

4. Rabi ハミルトニアン

以下，Id を恒等作用素，$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ は Pauli 行列，σ_0 は単位行列とする．2 準位（人工）原子と 1 モード光子のなす物理系の自由ハミルトニアン $\hat{H}_0$ は

*3) 観測量 A が状態 $\phi_{\rm S}(t,\boldsymbol{x})$ に観測される期待値は $\langle\phi_{\rm S}|A|\phi_{\rm S}\rangle=\langle\psi|A(t)|\psi\rangle$ となる[11,12)]．

*4) 一般に構成したときの光の量子場の粒子性は，連続モードに渡るたくさんの調和振動子を繋げた表現になる[13)]．

*5) 例えば，文献 14) の §10.1 に $\hat{H}$ とその重心座標と相対座標の表現があるが，これを参考に $M\to\infty$ を取ると，換算質量が m に収束し，(数学的厳密性を無視すれば) 重心運動のハミルトニアンが消えこの近似を得る．

*6) 束縛状態と散乱状態の物理的意味[14)]を考慮した．散乱状態を表す状態関数は，原子の遠方から電子がやってきて遠方に去っていく状態を表現し状態空間には属さない[12)]ため，その状態自身を現実的には観測できないと解釈した．

*7) 電子を複数個持つ原子の場合は，電子間斥力をも考慮した多体 Schrödinger 演算子に対する難しいスペクトル解析となるが，物理では原子核の電荷が電子により遮蔽される近似を用い，近似的にエネルギーを計算できる[14)]．

*8) LC 共振回路が 1 次元調和振動子と同等なエネルギー準位を作り出すことは，例えば文献 4) の §3.5 を見よ．

*9) このエネルギー・ギャップなどを含む非調和性の解析学による説明は今後の課題だと筆者は思っている．

$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z \otimes \mathrm{Id} + \sigma_0 \otimes \hat{H}(\omega_c)$ で与えられる．ここで，ω_a は原子の遷移振動数で $\hbar\omega_a$ が基底エネルギーと励起エネルギーの差になり，ω_c は共振器の共鳴振動数，すなわち 1 モード光子の振動数である．3 節で簡単に説明した共振器に閉じ込めた 1 モード光子と 2 準位の本物の原子を共振器の中で相互作用させたとき，QED における非相対論的原子と光の相互作用から出発し物理的設定を考慮した幾つかの近似を経ると，**Rabi ハミルトニアン**の相互作用にたどり着く．このように得られた Rabi ハミルトニアン $\hat{H}_R$ を circuit QED では超伝導回路で実現し[17]，それは状態空間を $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ とする*10) 行列係数の Schrödinger 作用素の形で書け，$\hat{H}_R = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ となる．ここで，$\hat{V} = \sqrt{2\hbar\omega_c}\,\sigma_x \otimes x$ で，$\hat{V}$ と $g \geq 0$ はそれぞれ 2 準位人工原子と 1 モード光子の相互作用とその（振動数と同じ次元を持った）結合定数である．$\hat{H}_R$ は数学における非可換調和振動子と呼ばれる演算子*11) の一つになる．

3 節で予告したように，1 モード光子の粒子性をよく表す表現を導入する[4,11,18]：演算子 a を

$$a := \sqrt{\frac{\omega_c}{2\hbar}}\,\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_c}}\,\hat{p}$$

で与え，演算子 $a^\dagger$ を a の共役演算子とする．$a^\dagger$ と a はそれぞれ生成演算子と消滅演算子と呼ばれ，正準交換関係 $[a, a^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = \mathrm{Id}$ をみたす*12)．これらの表現を用いると，$\hat{H}_0$ と $\hat{H}_R$ はそれぞれ

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$
$$\hat{H}_R = \hat{H}_0 + \hbar g\sigma_x\left(a^\dagger + a\right),$$

と書き直すことができる．ここで，物理の慣習に従い，数学で明示する σ_0, Id, $\otimes$ の表示を省略した．$\hat{H}_R$ は自己共役となり（エネルギー・）スペクトルは離散固有値のみからなることが分かるが，この固有値と固有関数を求める固有値問題は伝統のある問題で未解決の部分も多い*13)．また，$\hat{H}_R$ の持つパリティ対称性*14) を利用し，固有値を求める様々な数値計算手法も開発されている*15)．

Rabi ハミルトニアンに**回転波近似**（**RWA**）[4] を適用してみる．RWA を行うために通常仮定される物理的条件は，(rwa1) $g/\omega_c \ll 1$；(rwa2) $|\omega_a - \omega_c| \ll \omega_a + \omega_c$ である．まず，(rwa1) より，$\hat{H}_R$ による各相互作用項の Heisenberg 描像は，回転項に対しては $\sigma_+ a(t) \approx e^{i(\omega_a - \omega_c)t}\sigma_+ a$, $\sigma_- a^\dagger(t) \approx e^{-i(\omega_a - \omega_c)t}\sigma_- a^\dagger$，対向回転項に対しては $\sigma_+ a^\dagger(t) \approx e^{i(\omega_a + \omega_c)t}\sigma_+ a^\dagger$, $\sigma_- a(t) \approx e^{-i(\omega_a + \omega_c)t}\sigma_- a$ と近似できる．今，我々の持っている実験装置が波の 1 周期を観測するのに T なる時間だけかかるとする．振動数 $\pm(\omega_a - \omega_c)$ を持つ回転項の波の周期は $T_r = 2\pi/|\omega_a - \omega_c|$ で，振動数 $\pm(\omega_a + \omega_c)$ を持つ対向回転項の波の周期は $T_{cr} = 2\pi/(\omega_a + \omega_c)$ で与えられる．すると，我々の実験装置に対して，(rwa2) を $T_{cr} \ll T \leq T_r$ と解釈でき，相互作用の対向回転項の効果は観測できず無視してもよいであろう．この対向回転項を $\hat{H}_R$ から省くと **Jaynes–Cummings (JC) ハミルトニアン**[4] $\hat{H}_{JC}$ が得られる：

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_0 + \hbar g\left(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a\right).$$

ただし，$\sigma_\pm := (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$（複合同順）．JC ハミルトニアン $\hat{H}_{JC}$ も自己共役でスペクトルは離散固有値のみからなることが分かるが，パリティ対称性の他に粒子数に関する対称性*16) を持つので，この固有値問題は完全に解くことができる：今，$|g\rangle$ と $|e\rangle$ をそれぞれ 2 準位人工原子の自由ハミルトニアン $\hbar\omega_a\sigma_z/2$ の基底状態と励起状態とする．また，$|n\rangle$ を光子の Fock 状態，つまり，1 モード光子の自由ハミルトニアン $\hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ の

*10) $L^2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の 2 乗 Lebesgue 可積分な複素数値関数全体の成す Hilbert 空間である．

*11) 文献 19) の Def.3.2.11 で定義される演算子であるが，ここでの『非可換調和振動子』という言葉は，若山正人と A. Parmeggiani による数学的な命名で，非可換空間上の調和振動子といった物理的意味ではない．彼らは本稿と違ったタイプの演算子をスペクトル解析の立場から研究している．

*12) 数学としては，正準交換関係がどの線形部分空間上で成り立つかを気にせねばならない[12]．正準交換関係より，$a^\dagger a$ は光子の個数を表す演算子となる．

*13) 1973 年に連分数展開を用いた手法での表現を S. Swain が与え[20]，また，1986 年に H.G. Reik と M. Doucha は，Bargmann の Hilbert 空間上での表現を用いこの固有値問題が解決できると予想している[21]．2011 年に後者の表現を基にある関数を帰納的に構成し，その関数の零点で $\hat{H}_R$ の固有値を表現する手法が D. Braak によって与えられ[22]，米国物理学会の雑誌で話題になっていた[23]．筆者はこの関数の零点についての厳密な数理解析に興味を持っている．

*14) 数学的には，$\hat{H}_R$ と $\sigma_z(-1)^{a^\dagger a}$ とが強可換となること．

*15) 例えば，作用素論的手法を基にした表現を用いた数値解析が I.D. Feranchuk らによってなされ[24]，E.K. Irish は理論物理学的考察により以下に説明する回転波近似を一般化する手法で同じ表現にたどり着いている[25]．また，近似的に対角化を考える手法も F. Pan らにより考案されている[26]．

*16) 数学的には，$\hat{H}_{JC}$ と $\frac{1}{2}(1+\sigma_z) + a^\dagger a$ とが強可換となることで，従って，$\hat{H}_{JC}$ の固有値問題は，演算子 $\frac{1}{2}(1+\sigma_z) + a^\dagger a$ の固有空間上での固有値問題に帰着される．

固有関数とする：$|0\rangle = (\omega_c/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-\omega_c x^2/2\hbar)$, $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. すると，$\hat{H}_0$ の固有関数は $|g,n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle$, $|e,n'\rangle = |e\rangle \otimes |n'\rangle$, $n, n' = 0,1,2,\cdots$ で与えられ，$\hat{H}_{\rm JC}$ の固有関数は

$$\varphi_0^{\rm g} = |g,0\rangle,$$
$$\varphi_{+|n+1|}^{\rm g} = \cos\theta_n|e,n\rangle + \sin\theta_n|g,n+1\rangle,$$
$$\varphi_{-|n+1|}^{\rm g} = -\sin\theta_n|e,n\rangle + \cos\theta_n|g,n+1\rangle,$$

$n = 0,1,2,\cdots$ で与えられる[3,27]．ただし，$\omega_a \neq \omega_c$ のときは $\theta_n = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(2{\rm g}\sqrt{n+1}/(\omega_a-\omega_c)\right)$ で[*17]，$\omega_a = \omega_c$ のときは $\theta_n = \pi/4$ となる．それぞれの固有関数に対応する固有値は，

$$E_0^{\rm g} = -\frac{\hbar(\omega_a-\omega_c)}{2},$$
$$E_{+|n+1|}^{\rm g} = \hbar\omega_c(n+1) + \hbar\mathcal{R}_n({\rm g}),$$
$$E_{-|n+1|}^{\rm g} = \hbar\omega_c(n+1) - \hbar\mathcal{R}_n({\rm g}),$$

となる[3,27]．ただし，

$$\mathcal{R}_n({\rm g}) = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a-\omega_c)^2 + 4{\rm g}^2(n+1)}\,.$$

JC ハミルトニアンを量子相転移[28,29]の観点から見てみる．古典的な相転移は熱的揺らぎにより生じるが，量子相転移は量子的揺らぎにより生じるとされる．本稿での量子相転移は S.-J. Rey の定義と同じである[*18]：基底エネルギーを結合定数 g の関数とみたとき，ある臨界結合定数 $\rm g_*$ が存在して，基底エネルギーが $\rm g = g_*$ でエネルギー準位交差により非解析的になっている[28]とき，そのハミルトニアン（で記述される物理系）に量子相転移が生じるという．JC ハミルトニアンにはこの量子相転移が生じる[31]．図 1 の数値計算を見よ[*19]．今，$\sharp$ を $<, =,$ または $>$ とすると，例えば $\omega = \omega_a = \omega_c$ のときは容易に分かるように，$n = 1, 2, \cdots$ に対して $E_{-n+1}^{\rm g} \sharp E_{-n}^{\rm g}$ となるための必要十分条件は ${\rm g}\sharp(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\omega$ である[*20]．このエネルギー準位交差からもう一つ面白い特徴が見える：基底

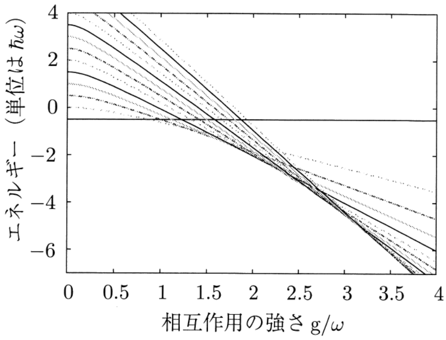


図 1 それぞれのラインは $\omega_a = 3\omega, \omega_c = \omega$ のときの $E_{-n}^{\rm g}$ を表し，$\rm g = 0$ のとき $E_0^0 < E_{-1}^0 < E_{-2}^0 < \cdots$ となるようにラインと $E_{-n}^{\rm g}$ が対応している．

状態が $\varphi_0^{\rm g}$ から $\varphi_{-1}^{\rm g}$，さらに $\varphi_{-2}^{\rm g}$，またさらに $\varphi_{-3}^{\rm g}$，$\cdots$ と，どんどん転移する過程で，最初の基底状態 $\varphi_0^{\rm g}$ は分離可能状態であるのに対し，$\varphi_{-1}^{\rm g}$ 以降の基底状態はエンタングルした状態[4,12,18]になる．以上の量子相転移は解析学的事実ではあるが，解析学は「JC ハミルトニアンは物理として具体的にどの結合定数まで有効なのか？」という問題には何もコメントしていない！

5. 結び：一つの数理科学的課題への入り口

最近の circuit QED の実験では，cavity QED の**強結合領域**[3,4]では見られなかった物性が観測され始め[9]，circuit QED の物理学者たちは，cavity QED の強結合領域と区別するため，その物性が見られる結合領域を**超強結合領域**[9,23,32]と命名している．つまり，この二つの結合領域との間には何らかの違いがある．しかし，残念ながら，その‘境目’を決める理論とその値を確定する手法は未だないようだ．これまでの実験結果によると，ある結合定数 $\rm g_{cr}$ があって，それより小さい結合領域では対向回転項の影響を無視でき JC ハミルトニアンでの理論解析が有効である[33]が，$\rm g_{cr}$ を超えた結合領域に突入すると対向回転項の効果が現れ，結合定数を $\rm g_{cr}$ から大きくしていくと対向回転項の影響が増大し Rabi ハミルトニアンでの理論解析が必要となる[9]ようだ．従って，「JC ハミルトニアンから Rabi ハミルトニアンへ移行する過程を説明し，$\rm g_{cr}$ を求められる包括的な数理モデルを作る必要がある」と筆者は思っていて，ある試み的な解析を行っているが，今のところ得られた結果では，E. Solano らが主張している‘境目’の値[32] $\rm g_{cr}/\omega_c = 0.1$ と一致してい

*17) 一見，θ_n の表現に以下で与える $\mathcal{R}_n({\rm g})$ が現れそうだが，正接の倍角の公式によりこの単純な表現を得る．

*18) S.-J. Rey はグラフェンの多重層系に見られる量子相転移を $D7 + D3$ ブレインの言葉で説明しようとしている[30]．

*19) 量子相転移により $\hat{H}_{\rm JC}$ の基底エネルギー $E_{\rm JC}({\rm g})$ は $E_{-n}^{\rm g}$, $n = 0,1,2,\cdots$ の包絡線から形成される．各 $E_{-n}^{\rm g}$ の g に関する $\rm g \to \infty$ のときのオーダーに対して，$E_{\rm JC}({\rm g}) \sim -{\rm g}^2$ である事実もこれから説明される．

*20) $\omega_a \neq \omega_c$ の場合を含めたより詳しいエネルギー交差の解析は文献 31) にある．

る*21)．この数理解析の手法については話が長くなるので，別の機会に譲ろうと思う．

本稿で紹介した超伝導回路を用いる人工原子とマイクロ波という光との相互作用以外にも，量子ドットと光の相互作用など，人工原子と光の相互作用を実現する手法は幾つかある．もちろん，本物の原子と比べても，それぞれ長所・短所があるわけだが，人工原子を用いた太陽光発電や光源の開発などといった工学的興味もつきない．「今後のこの分野の発展に，数理科学として喰らい付いていくことも面白いのでは」と感じている．

謝辞

まず，筆者が日立製作所基礎研究所研究員時代にcavity QEDの勉強を勧めて下さった和気泉氏に感謝を述べたい．また，circuit QEDの理論や実験に関しては，P.-M. Billangeon氏，W.J. Munro氏，中村泰信氏，中ノ勇人氏，根本香絵氏，仙場浩一氏，鹿野豊氏，彼らとの研究交流を通して多くのことを学んだ．ここに感謝の意を表したい．

参考文献

1) M. Hirokawa, *IAMP News Bull.*, **April** (2010) 8.
2) NHK教育テレビ，Eテレ10minボックス理科3物理・化学第10回「原子を探る～人工原子に挑む」.
3) S. Haroche and J-M. Raimond, *Exploring the Quantum. Atoms, Cavities, and Photons*, Oxford University Press (2006).
4) 上田正仁，『現代量子物理学』培風館 (2011).
5) F. Marquardt and C. Bruder, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 054514; Yu. Makhilin, G. Schön, A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
6) I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij, *Nature* **431** (2004) 159; A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Fruzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kuar, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf, *Nature* **431** (2004) 162.
7) 仙場浩一，齊藤志郎，角柳孝輔，中ノ勇人，日本物理学会誌 **64** 巻1月号 (2009) 37.
8) 中村泰信，日本物理学会誌 **66** 巻10月号 (2011) 762.
9) T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E.P. Menzel, F. Hocke, M.J. Schwarz, J.J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, *Nature Physics* **6** (2010) 772; P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J.J. García-Ripoll, E. Solano, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 237001.
10) 江沢洋，『フーリエ解析』朝倉書店 (2009).
11) 江沢洋，『量子力学 (I)』裳華房 (2002).
12) 清水明，『新版 量子論の基礎』サイエンス社 (2008).
13) 武田暁，『場の理論』裳華房 (1991).
14) 江沢洋，『量子力学 (II)』裳華房 (2002).
15) 中村泰信，日本物理学会誌 **57** 巻11月号 (2002) 797.
16) R.J. Schoelkopf and S.M. Girvin, *Nature* **451** (2008) 664.
17) M. Devoret, S. Girvin, and R. Schoelkopf, *Ann. Phys.* (Leipzig) **16** (2007) 767.
18) 根本香絵，『量子力学の考え方』サイエンス社 (2009).
19) A. Parmeggiani, *Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators: An Introduction*, Springer, (2010).
20) S. Swain, *J. Phys. A* **6** (1973) 192; *J. Phys. A* **6** (1973) 1919.
21) H.G. Reik and M. Doucha, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 787.
22) D. Braak, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 100401.
23) E. Solano, *Physics* **4** (2011) 68.
24) I.D. Feranchuk, L.I. Komarov, and A.P. Ulyanenkov, *J. Phys. A* **29** (1996) 4035.
25) E.K. Irish, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 173601.
26) F. Pan, X. Guan, Y. Wang, and J.P. Draayer, *J. Phys. B* **43** (2010) 175501.
27) A. Blais, R.-S. Huang, S. Givrin, and R. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69** (2004) 062320.
28) S. Sachdev, *Quantum Phase Transition*, Cambridge Univ. Press (1999).
29) 今田正俊，日本物理学会誌 **66** 巻2月号 (2011) 88.
30) S.-J. Rey, "*Quantum Phase Transition from String Theory*" at String 07, Madrid, June 25–29 (2007); *Prog. Theo. Phys. Suppl.* **177** (2009) 128.
31) M. Hirokawa, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001) 221; *Phys. Lett. A* **294** (2002) 13; *Indiana Univ. Math. J.* **58** (2009) 1493; *Phys. Rev. A* **79** (2009) 043408.
32) J. Casanova, G. Romera, I. Lizuain, J.J. García-Ripoll, and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 263603.
33) J.M. Fink, M. Göppl, M. Baur, R. Bianchetti, P.J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, *Nature* **454** (2008) 315.

（ひろかわ・まさお，岡山大学大学院自然科学研究科）

*21) Rabiハミルトニアンに対しては，Rey氏の意味でのエネルギー準位交差による量子相転移は見られないが，筆者は「他の形で量子相転移が関与し，その量子相転移の臨界点が g_{cr} を決めるのではないか？」と予想している．また，素粒子物理学では，強い相互作用を作る湯川型相互作用の結合定数が0.1 ～ 10であるから，「circuit QEDの超強結合領域が原子・光間相互作用でこれに相当する強い相互作用を超伝導回路上に作り出して行くのではないか？」と注目もしている．

素粒子論と解析学



伊 東　恵 一

20 世紀は物理学の世紀であった．1970 年代には物理帝国主義という言葉があったくらいである．素粒子論はその先端であって，多くの素粒子論研究者はそのプライドを持っているはずである．数学的に正しいことは自然界に現れるというのが，この特集号で竹崎先生も引用しているガリレオの言葉『神は数学の言葉で天地を創造した』以来の我々の信仰であって，超対称性を除くと（？），ほぼこの予言通りである．当時学生だった私にはあまりに人工的に思われた，Higgs 粒子を媒介とする統一理論を，巨額の費用をかけて作られた Large Hadron Collider が認証する段階だと聞くと少しびっくりしてしまう．

素粒子論は量子力学の延長上に必然的に存在していて，その数学との関連は浅からぬものがあり，互いに補完してきた．批判を覚悟で思いつくまま書くと

1. 作用素論（場の理論，観測理論），
2. 偏微分方程式（Schrödinger 方程式），
3. 多変数関数論（分散理論，S 行列理論），
4. 非線形偏微分方程式（instanton），
5. 幾何学（ゲージ理論，繰りこみ群と Ricci flow），
6. 非可換幾何（string 理論，場の理論），
7. 確率論（Anderson 局在，string の行列模型），

などなど，相互に問題やアイデアを提供し合ってその分野は広大である．しかし今さらながら「解析学との関連は」と問われると 2 つの領域は茫漠と広いので戸惑ってしまう．

今はどこの分野でも同じかもしれないが，素粒子論は昔から流行の激しい分野であり，研究に時間がかかる数理物理の人にとってはフォロウアップに戸惑うことが多いのだが，何が重要で本質的な問題か見極めることが第一である．もっともこのような問題は得てして難問であるわけだが．

この小文では素粒子論というか場の理論での私の小さい知識の中で相互の共鳴あるいは干渉を考えてみたい．

1．量子力学から場の理論へ

古典力学での**相空間**は，力学のハミルトニアンによる定式化によっていて，座標とそれに対で定義される運動量のなす空間のことである．古典力学では運動は，この空間の軌道で表されるが，量子力学ではシャープな軌道は意味を持たず，粒子を表す波動関数は相空間での局在された集合で記述される．すなわち古典力学は常微分方程式で，量子力学は偏微分方程式である．

この対応関係は，古典力学の正準変換を表すポアッソン交換関係

$$\{P_i, Q_j\}_P \equiv \sum_k \partial_{p_k} P_i \partial_{q_k} Q_j - \partial_{q_k} P_i \partial_{p_k} Q_j = \delta_{ij}$$

を，Heisenberg の交換関係

$$[p_i, q_j]_H = p_i q_j - q_j p_i = -i\hbar \delta_{ij}$$

に置き換えてなされる．これで座標 x_i と運動量

$p_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$ の関係が出てきて**第一量子化**と言われている．これは対応関係と呼ばれる置き換えであるが，どう弁護しても論理の飛躍がありミステリーそのものである．これに続いて場の変数 $\phi(x,t)$ とそれと共役な $\pi(x,t) = \partial\phi(x,t)/\partial t$ に交換関係 $[\pi(x,0), \phi(y,0)] = -i\hbar\delta(x-y)$ を要求する．Heisenberg の交換関係を連続空間に拡張したもの，$\delta_{ij} \to \delta(x-y)$，であり空間の各点各点に一つの量子力学を対応させ，空間を無限の調和振動子で埋め尽くしたことになる．

時間 t を ix_0 と解析接続すると，時空点は互いに空間的になって，場の演算子は互いに可換になり，可換な環は L^∞ な関数に置き換わり（可換環の表現），物理現象がこの空間での経路（過去の歴史）の足し合わせとして表せることになる．

この**第二量子化**は Heisenberg や Bohr たち天才の考え付いた最初の量子化より自然に見える．あるいは量子力学をこのより根源的な「**場の量子論**」から導くのが理に適っているのかも知れない．実際現在の数学と素粒子論のある種の融合はこの（Feynman に始まる）**汎関数積分**または**経路積分**による量子化を抜きに語ることはできない．

今ではユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ での汎関数積分

$$\int \prod_i \phi(x_i) \exp\left[-\int S(\phi(x))d^d x\right] \prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\phi(x)$$

を何らかの意味で定義し，計算することになる．自由場の場合には

$$d\mu_0 = \exp[-S_0(\phi)] \prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\phi(x)$$

$$S_0 = \frac{1}{2}\int (\phi(x)(-\Delta + m_0^2)\phi(x))d^d x$$
$$= \frac{1}{2}\int [(\partial_\nu\phi(x))^2 + m_0^2\phi^2(x)]d^d x$$

として

$$\langle\phi(0)\phi(x)\rangle = \int \phi(0)\phi(x)d\mu_0$$

$$= \frac{1}{-\Delta + m_0^2}(x,0) = \int \frac{e^{ipx}}{p^2 + m_0^2}\frac{d^d p}{(2\pi)^d}.$$

相互作用は

$$S_I = g\int \phi^4(x)d^d x$$

（ϕ^4 模型）や

$$S_I = g\int \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x)d^d x$$

（湯川模型）などを S_0 に加える．結合定数 g が零ならば**発散**は何もなく自由な系を示すが，相互作用が入った瞬間に $\delta_{ij} \to \delta(x-y)$ の変更（どんな近い 2 点でも峻別できるという想定）に伴って，発散が生ずる．表面的には摂動したら δ 関数に代表される超関数の積が現れ，定義できないことに起因する．

2. 発散との遭遇と解決

このように場の理論はその出自から発散が付きまとい，その処理の解明と物理的意味付けに 20 世紀の 2/3 を要したのであった．この発散の処理を整合して処理するのが**繰りこみ理論**であるが，その中でもとくに**漸近的に自由**な理論のみが存在を許される．

まず発散を迂回するために，相空間で運動量にあたる部分に上限 κ を入れて，計算後 $\kappa \to \infty$ にする．このために κ に依存する補正項を入れて，無限大が相殺されるようにする．無限大を差し引いて有限にするだけなのでいつでも可能だが，相対論的に不変とかゲージ変換に対し不変などを要求すると恣意性はある程度消える．さらにこの発散のパターンが有限におさまる理論を「**繰りこみ可能**」であるという．中間子の相互作用を表す一番単純な 4 次元 ϕ^4 模型は $\phi(x) = \phi(x,0)$ を時刻 0 での場の演算子として形式的なハミルトニアン

$$H(\phi) = \frac{1}{2}\int \phi(x)(-\Delta)\phi(x)d^3x + \int \left[g_0\phi^4(x) + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2(x)\right]d^3x$$

で古典力学と同じように時間進展が定義される．$\phi^4(x)$ の中の $\phi(x)$ の運動量（フーリエ成分の振動数）が $|p| < \kappa$ しかないとして計算し，κ とともに発散する項がまた同じような形，すなわち

$$\langle \phi, (-\Delta)\phi \rangle, \quad \int \phi^4(x) d^3x, \quad \text{etc.}$$

に発散係数のついた形で現れるので，それを相殺する項を元の係数に入れ込んで

$$\begin{aligned} H_{ren}(\phi) &= \frac{1}{2} Z(\Lambda) \int \phi(x)(-\Delta)\phi(x) d^3x \\ &\quad + \int \left[g(\kappa)\phi^4(x) + \frac{1}{2} m^2(\kappa)\phi^2(x) \right] d^3x \\ &\quad - E_0(\kappa) \end{aligned}$$

と補正を含んだ係数 $Z(\kappa)$, $\lambda(\kappa)$ などを用いて表される．この模型のように，有限個の項の係数の中に κ が吸収される系を繰りこみ可能という．今の $\boldsymbol{\phi_4^4}$ **模型**や**量子電気力学**，**非可換ゲージ理論**などが該当する．今の場合，具体的には

$$\begin{aligned} g(\kappa) &= g_0 + O(\log\kappa) g_0^2 + O((\log\kappa)^2) g_0^4 + \cdots, \\ Z(\kappa) &= \frac{1}{2} + O(\log\kappa) g_0^2 + \cdots \end{aligned}$$

などであり，これを計算すると摂動上発散は「$\infty - \infty$ = 有限」という形で消えている．しかしこの操作はそれほど単純ではない．というのは補正項は再び ϕ^4 に比例し係数は $O(\log\kappa) g_0^2$ であり，これも次の発散を引き起こすので，入れ子のような引き算操作をしなければいけない．この処方は Bogolyubov–Parasiuk–Hepp の繰りこみ法といわれ 1960 年代に遡るが，これには量子群（**Hopf 代数**）の構造が入ることが少し前 D. Kreimer[1)] と A. Connes とによって示された．しかしこれが偶然か，深遠な物理的な意味を持つかは知られていない（後述の繰りこみ変換を結合定数の大小に関わらず行うには，この構造を利用できるだろう）．

これらの繰りこまれた結合定数や物理量は $\kappa \to \infty$ でどう振る舞うのであろうか．

$\exp[-(\log\kappa) g_0]$ という関数とその展開に状況は似ている．$\kappa \to \infty$ での結合定数 $g(\kappa)$ は無限大に発散するか，零に収束するかであるが[*1)]，$g(\kappa) \to 0$ の理論を「漸近的に自由である」といい，このような理論のみが許容される．

Hopf 代数のような複雑な「無限個の計算をしないでどうやって分かるのか」といぶかしむ読者のため，繰りこみ群法といわれる計算法を説明する．κ がそんなに大きくなく，g_0 が小さいとし，$|p| < \kappa$ に制限し汎関数積分すれば，

$$g_1 = g_0 + \alpha(\log\kappa) g_0^2 + o(g_0^2).$$

ここで g_0 が十分小さければ，高次の部分に対応する積分への寄与が $o(g_0^2)$ で抑えられることを示す．これは積分の評価が必要であるが Hopf 代数に関する，あるいは詳細な高次の繰りこみに関する議論は g_0 が小さいという仮定下では必要ない．システムをスケール変換して結合定数が g_1 の ϕ^4 理論を作って大きな運動量の部分 $\kappa < |p| < \kappa^2$ が元の $1 < |p| < \kappa$ に移されるようにして，同じ処方を行うと漸化式の形で[*2)]

$$g_n = g_{n-1} + \alpha(\log\kappa) g_{n-1}^2 + o(g_{n-1}^2).$$

よって $\alpha < 0$ なら $g_n \to 0$ であるが，$\alpha > 0$ なら $g_n \to \infty$ になることが推察される．

この $g(\kappa) \to 0$ という要求は強い制限であって，現代物理を少しでも知っている方は，このようなモデルは今の標準理論の基礎をなす，非可換ゲージ理論くらいしかないことを理解されているであろう．今解説したボソン模型 ϕ_4^4 は実は駄目である．具体的には，$\alpha > 0$ になっていて，$g(\kappa) \to \infty$ になってしまう．

場の方程式はその非線形性ゆえに結合定数 g はエネルギーレベルごとに違った値をとり，当初に発散したのは，そのことを無視して全運動量で積分したためである．本来は運動量をレベルに分けてそこの実効的結合定数で計算しなければならない．「漸近的に自由である」模型は，発散が問題になる高い運動量では結合定数が零になって発散が消えるという至極当然な理由で有限理論になる．

---

*1) ストリング理論やそれから派生した非可換空間上の理論では有限の値に収束する可能性もある[4)]．この理論の整合性は不問として，非局所場理論なので，$\delta(x-y)$ は現れず発散がないのもうなずける．

*2) 物理学者が使う形では $\log\kappa$ で微分する形をとって

$$\frac{\partial}{\partial \log\kappa} g = \alpha g^2.$$

「発散ゆえに現在の場の理論は不完全である」という伝統的批判意見もあるが，前述のように考えればそれほど異常ではないとも考えられる．

このことをどれだけ数学的（解析学的）に論じられるだろうか？ その場合2つのことが問題になるだろう．

1. H_{ren} の定義域と収束の問題

2. 「漸近的に自由である」系でのハミルトニアンの数学的構造と意味

まず基本的な最初の問題だが，幾分準備がいる．自由場の理論はいわゆる Fock 空間 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n, \quad \mathcal{F}_n = \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^{d-1})$$

で定義されているが，相互作用が入るとここから逸脱してしまう．これは相互作用が無限に広がってしまうとそうなることが最初 R. Haag によって指摘された（Haag の定理）．

この問題の解決には少し歴史を遡る必要がある．発散の少ない $P(\phi)_2$ などの2次元モデルでは1970年代に Glimm と Jaffe[2] によって空間が有限の場合には Fock 空間の上でも定義でき，基底状態 Ω_g が Fock 空間の元であることが示された．これを **Locally Fock** であるという．この基底状態で状態 $\rho_g(\cdots) = \langle \Omega_g, \cdots, \Omega_g \rangle$ を作り無限体積極限をとって理論が確立する．

湯川モデルは，ボソン場 ϕ の他にフェルミ粒子 ψ が入ってきて，たとえ2次元でも発散はきつく，ボソン（中間子）の質量項や基底状態エネルギーに，空間有限でも発散が生じ，普通の意味で Hamiltonian に無限大の係数をもった補正項が入ってくる．しかしながらこの Hamiltonian は元の Fock 空間の上で定義され自己共役であって，基底状態も Fock 空間の元である．このことは奇妙に感じられるかもしれないが，H_{ren} の基底状態が H_0 の定義域に入っていないだけである．この証明のため Glimm と Jaffe はグラフ収束に関する定理[2]を作っている．ここで構築された数学理論，計算技術や評価法は，量子電気力学や場の理論の古典近似による解析で，現在でも使われている[5]．

ただしこの方法が無限個の発散項の生ずる，4次元ボソン理論に適用でき，そしてできたとして，類似の結論（Locally Fock）が出てくるかについてはかなり否定的である．さらにまた，この方向のアプローチは，なかなか大変で，最初に考えた漸近的自由度の実現が問題になるのではないか．より複雑な現実的なモデルでは発散項が無限に現れるので発散項を一つ一つ調べ補正項をあてがい（Hopf 代数構造），Hamiltonian の収束を議論するのは不可能に近い．実際3次元の理論でお終いになっていて，4次元では存在しない．

そこで今は，Schwinger 関数といわれる期待値（相関関数）[3] を経路積分で求め，そのあと GNS（Gelfand–Naimark–Segal）構成で演算子を決めるのが通常である．

2番目の問題は関数解析学的に何を指すのか？ ϕ_4^4 で分析したことがヤン・ミルズ場を含んだ標準モデルの Hamiltonian で起こることが期待されるがその Hamiltonian の数学的構造が分かっていない状況では答えにくい問題である．

今までの経験からいえば，場の理論の波動関数が，非可換コンパクト群の作用する多様体に値をとることが効いているように見える．このような系の Schrödinger 方程式はそれ自体非線形で，正準量子化のアプローチでは不定計量など，非物理的な量が介在し，あらわには何が効いているのか見えにくい．しかし経路積分の立場からいえば，強い対称性が，系がある方向に片寄ること（相転移現象，ordered phase）を防ぎ，いつも non-ordered であるためだと説明できるが，全く未解決である．

3. 簡単な漸近的自由な理論

前節の話を**シグマモデル**という単純化されたモデルで考えてみる．これは各点各点にコンパクトなリーマン多様体 $\sigma(x) \in M$, $x \in \mathbb{R}^d$ が対応し

$$\int \exp\left[-\int g_{ij}\partial_\mu \sigma^i(x)\partial_\mu \sigma^j(x) d^d x\right] \prod_x d\sigma(x)$$

が対象である．ここで g_{ij} はリーマン計量で，

$d\sigma(x)$ は各点に貼り付けられたリーマン面上の測度である．この積分はかなり難しい．一番簡単な $\sigma(x) = (\cos\theta_x, \sin\theta_x) \in S^1$ で，$g_{ij} = \delta_{ij}$ の場合に考えてみると，連続時空 $\mathbb{R}^d$ を格子幅 a の格子 $a\mathbb{Z}^d$ で置き換えれば，この部分は定数を除いて

$$\beta a^d \sum_x \sum_{\mu=1}^{d} \frac{1}{a^2}[1 - \cos(\theta_x - \theta_{x+e_\mu})],$$
$$\theta_x \in [-\pi, \pi]$$

となり，d 次元 XY モデルである．ここで β は逆温度に対応する．このモデルの統計力学的性質もすべて分かっていないが 2 次元では以下のようである[*3)]：

1. $\beta < \beta_c$ では高温相であり相関関数が指数的に減少する，

$$\langle\sigma(0)\sigma(x)\rangle \sim \exp[-m(\beta)|x|]$$

2. $\beta > \beta_c$ では相関関数が逆多項式的に減少する Kosterlitz–Thouless 転移を起こす，

$$\langle\sigma(0)\sigma(x)\rangle \sim |x|^{-c/\beta}$$

2 点 x, y の距離は $\mathbb{R}^d$ では $a|x-y|$ なので，$\mathbb{Z}^d$ 理論では $|x-y| \to \infty$ として見ないといけない．したがって少なくとも非自明な連続理論を作るには，$a \to 0$ に伴って，$m(\beta) \searrow 0$，すなわち $\beta \nearrow \beta_c$ を同時に考えることになる．

格子系でこれを厳密に追うのは，パラメータのチューニングをどうするかで微妙な問題が残っている．他方形式的連続極限では

$$\theta_{x+e_\mu} - \theta_x = a\partial_\mu\theta_x$$

かつ $\partial_\mu\theta_x \in a^{-1}[-\pi, \pi]$ として $a \to 0$ とすれば

$$\int \delta_{ij}\partial_\mu\sigma^i(x)\partial_\mu\sigma^j(x)d^dx = \int(\partial\theta_x)^2 d^dx$$

が得られ，形式的連続極限で **white noise** に収束する．

$\theta_x \in [-\pi, \pi]$ のようにコンパクトになっていればこの系は非自明な系を表し，θ_x が実数すべてを変化できれば，white noise でガウス的になる．これは非自明な相互作用を記述する立場から言えば困ったことで，S^1 系ではそのようなモデルが作れないということになり，同じ対称性をもつ量子電気力学もこの系列に入ると思われている．

しかし M が $SO(N)$ などのようなコンパクト非可換群や $SO(p,q)$ のような非コンパクト非可換群の場合には摂動的にすら積分が困難である．このような場合には局所座標系を取って積分することができるが波打つ多様体の上で局所的にしかできないし，しかも $d = 2$ では発散が生じる．そこで，$\sigma(x) \in M$ を局所座標で記述してみる．

以下の 2 つの曲面の上に値をとるスピンモデルに限定しよう：

(i) 球面（S^2）スピンモデル
$M = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3);$
$\langle\sigma, \sigma\rangle \equiv \sum_i(\sigma^i)^2 = 1\}.$

(ii) 双曲面（H^2）スピンモデル
$M = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3);$
$\langle\sigma, \sigma\rangle \equiv (\sigma^1)^2 - (\sigma^2)^2 - (\sigma^3)^2 = 1, \sigma^1 \geq 1\}.$

すなわち 2 次元球面モデルと，2 次元双曲面モデルで前者は正の，後者は負の定曲率面である．このとき $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を 2 次元の格子点の正方形の部分とし，各点 $x \in \Lambda$ にはスピン $\sigma(x) \in M$ が配置される．ハミルトニアンを

$$H_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{|x-y|=1}\langle(\sigma_x - \sigma_y), (\sigma_x - \sigma_y)\rangle$$

とする．ここで $x \in \Lambda, y \in \Lambda, \langle\sigma_x, \sigma_x\rangle = 1$ に注意．配位 $\{\sigma(x) \in M; x \in \Lambda\}$ の分布確率（ギッブス測度）を

$$\frac{1}{Z}\exp[-\beta H_\Lambda(\sigma)]\prod_{x\in\Lambda} d\sigma_x$$

としておく．

物理的には S^2 モデルは**強磁性体モデル**であり，H^2 モデルは**アンダーソン局在**やランダム行列理論のある局面を記述すると信じられている．さて

(i) $M = S^2$
$\sigma = (\cos\theta, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi),$

*3) これらのモデルは逆多項式より早く減少すれば指数的に減少することが示される．

(ii) $M = H^2$

$\sigma = (\cosh t, \sinh t \cos\phi, \sinh t \sin\phi)$

と局所座標系を導入すると，S^2 では

$$d\sigma = (-\sin\theta, \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi)d\theta + (0, -\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi)d\phi,$$

$$\langle d\sigma, d\sigma\rangle = (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2 = \sum g_{ij}(\sigma)d\sigma^i d\sigma^j.$$

ここで $g_{ij}(\sigma)$ はリーマン計量で，今の場合対角形で $\sigma^1 = \theta, \sigma^2 = \phi$ ととれば $g_{11} = 1, g_{22} = \sin^2\theta$ である．H^2 では $\sigma^1 = t, \sigma^2 = \phi$ として

$$\langle d\sigma, d\sigma\rangle = \sum g_{ij}(\sigma)d\sigma^i d\sigma^j.$$

ただし $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sinh^2 t$. このモデルではリッチテンソルも対角形で

S^2 の場合：$R_{ij} = g_{ij}$,
H^2 の場合：$R_{ij} = -g_{ij}$

が確かめられるが，数学的にはこれらは，S^2 (H^2) が正 (負) の定曲率空間であることを反映している．

4. Ricci Flow と繰りこみ群

今，格子幅は $a = 1$ であるが，これを $a \downarrow 0$ とし形式的連続極限で

$$H(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_\Lambda g_{ij}(\sigma(x))\partial_\nu\sigma^i(x)\partial_\nu\sigma^j(x)d^2x.$$

ここで ∂_ν は $x \in \mathbb{R}^2$ に関する偏微分である．

任意の $\sigma_0(x) \in M$（背景場）の近傍にある $\sigma(x) \in M$ を $\sigma_0(x)$ と接ベクトル ξ で

$$\sigma^i = \sigma_0^i + \xi^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\xi^j\xi^k + O(\xi^3)$$

と表し，$g_{ij}(\sigma)$ を展開する：

$$g_{ij}(\sigma) = g_{ij}(\sigma_0) + \partial_k g_{ij}|_{\sigma_0}\xi^k + \cdots.$$

ξ の 2 次式の部分は

$$\frac{1}{4\pi}\int\left[(\nabla_\nu\xi^k)^2 - R_{ikjl}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j\xi^k\xi^l\right]dx$$

の形をとる．ξ 積分はガウス積分になり，ξ の運動量は $|p| < \kappa$ として，

$$\int\xi^k\xi^l\exp\left[-\frac{1}{4\pi}\int(\nabla\xi)^2d^2x\right]\prod d\xi \sim \delta_{kl}\log\kappa$$

と $\log\kappa$ で発散する項が得られる．すなわち $t = \log\kappa$ の発散係数をもつ $R_{ikjk}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j = R_{ij}\partial_\nu\sigma^i\partial_\nu\sigma^j$ が補正項として元の $H(\sigma)$ に加わる．この変化（繰りこみ群）を脚注 2 に書いた微分方程式形で表すと，G. Perelman[6] が引用して一躍有名になった，**Ricci flow**

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = R_{ij}$$

が得られる．これは非線形偏微分方程式だが，今の定曲率スピンでは，Ricci flow は M の半径 $\alpha^{-1/2}$ を変えるだけで，$g_{ij}(t) = [\alpha(t)]^{-1}g_{ij}(0)$,

$$\alpha(t) = \frac{1}{\pm t + t_0}, \quad t_0 = 1$$

と解けてしまう．すなわち，S^2 模型では相転移はなく，$t \uparrow \infty$ で g_{ij} は無限大に近づき曲率が零になる（漸近的自由）．他方 H^2 模型ではある t_0 で $g_{ij} = 0$（崩落，曲率無限大）になり，2 次元にも関わらず相転移があると考えられる．

Ricci flow による計算は最低次近似なので割り引いて考えなければならないが，大方の物理学者の同意する結論であり，厳密な計算による統計力学的分析は進行中であることを報告しておきたい[7]．

参考文献

1) D. Kreimer, On the Hopf algebra structure of perturbative QFT, arXiv:q-alg/9707029.
2) J. Glimm and A. Jaffe, "Quantum Field Theory Models", 1970, Les Housches Physics School, pp.1–108.
3) J. Glimm and A. Jaffe, "Quantum Physics, A Functional Integral Pont of View", Springer Verlag, 1981.
4) H. Grosse and R. Wulkenhaar, Progress in solving a noncommutative quantum field theory in 4 dimensions, arXiv:0909.1389v1.
5) 廣島文生氏の本特集号寄与．
6) G. Perelman, The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometrical Appplications, arXiv: math.DG/0211159.
7) 伊東恵一，『繰りこみ群の物理と数理』, SGC-81 (2011), サイエンス社．

（いとう・けいいち，摂南大学理工学部）

統計力学と確率論



原　隆

1. はじめに

身の周りの物質（水，空気など）が原子や分子からできていることは中学校でも習う．しかし，これらの物質は通常，一定の性質を持った一様均質な物質と認識され，我々が日常生活で原子・分子の存在を実感することはない．一方で，我々は身の周りの物質が温度（や圧力）によって様々に様子を変えること，例えば水が気体，液体，固体という3つの相を持つことを経験的に知っている．

原子・分子などのミクロなスケールでの物質の構成要素から，我々が日常経験するマクロな現象はいかに説明できるのだろうか？ この問に答えるのが（平衡）統計力学の大きな目標の一つである*1)．

平衡統計力学の数学的構造は，特定の確率分布に従う（独立でない）多数の確率変数についての確率論そのものであり，両者の間には深い関係が存在する．本稿ではこの関係のいくつかの側面について解説する．

*1) 氷を入れたコップを温度20℃の室内に放置すると，氷は徐々に融けて最終的には室温と同じ温度の水になる（その結果，室温は僅かながら下がる）．このように孤立した系を十分放置して熱平衡に達した後の状態が**平衡状態**で，平衡統計力学はこのような平衡状態を扱う．世の中には，見かけは時間的に変化しないが熱など一定の流れがある状態（例：針金の2つの端が，高温と低温の熱源に接している）も存在し，これらは非平衡定常状態と呼ばれる．さらに，「氷が融けて水になる」過程は大変興味深い非可逆過程である．非平衡定常状態，より一般の非可逆過程の解明も統計力学の大きなテーマであるが，こちらはさらに難しい問題なので，本稿では立ち入らない．

2. 統計力学の考え方

2.1 気体分子の運動

簡単な例として，1種類の分子（原子）からなる気体を考えよう．分子間には（弾性衝突する以外の）相互作用が働いていないものとする（現実の物質では，分子間にこれ以外の相互作用が働いているが，高温では実質的に無視できる．低温の場合は4節で考察する）．

気体分子は熱運動*2)によって互いに激しく衝突しているので，系のミクロな状態は時々刻々変化する．この時間発展を解析できれば良いが，1リットルの気体中には10^{22}個くらいの分子が入っているので，これらの分子すべての位置と運動量を一瞬だけでも記録するのはほぼ不可能であり，ましてやその時間発展など追えるはずがない．

ところが，我々が日頃見ているものは，個々の分子の運動ではなく，それらの**平均**だと考えられる．例えば気体が容器の壁に及ぼす圧力は，容器の壁にぶつかった分子からの力を平均したものと考えられる．となれば，マクロな現象を見る際に我々がすべきことは，個々の分子の運動を追うことではなく，それらのある種の平均をみることであろう．これが統計力学の根元の考えである．

問題は，どのような平均をみるべきか，ということである．分子集団の時間発展を古典（または

*2) 分子のランダムな運動が熱の実態であることを看破したことが統計力学の萌芽と言ってよいだろう．

量子）力学を用いてまじめに追跡し，その結果を用いて物理量を測定時間の長さ程度で平均する，とするのが理想であるが，これは現時点では不可能だ．ところが，時々刻々現れる状態は，マクロの視点から見ればほとんど区別がつかないものがほとんどと思われる（一つの傍証を 3.2 節で与える）．となれば，時間発展をまじめに追う代わりに，系の**すべてのミクロな状態について平均を取ってしまえばよいのではないか？** これが統計力学の根本にある考え方である[*3]．

2.2 ミクロカノニカル分布

以上の考え方をもとに，平衡統計力学は以下のように定式化される[*4]．まずは容器に閉じ込めた粒子の系を考え，容器の壁はエネルギーのやり取りを全く許さないものとする．このような系ではエネルギーが保存されるから，時間発展の間，系は同じエネルギー（E とする）の状態の間を経巡っていると考えられる．そこで，このエネルギー E の状態すべてに同じ重み[*5]を与えた状態分布を**ミクロカノニカル分布**という．また，このミクロカノニカル分布における物理量 F の期待値を

$$\langle F\rangle^{\mathrm{MC}} := \frac{1}{N_E}\sum_{i=1}^{N_E} F_i \tag{1}$$

と定義する（N_E はエネルギー E である状態の総数，$i=1,2,\cdots,N_E$ はそのような状態を番号づける添字，F_i は状態 i における物理量 F の値）．前節の考えに従い，この期待値 $\langle F\rangle^{\mathrm{MC}}$ が，我々が F を観測したときの結果だと考えるのである[*6]．

*3） もちろん統計力学が現在の形で定式化されているのには実験事実や熱力学との整合性が大きく効いている．ここでは（往々にして明示されない）一つの理由を示した．

*4） この辺りのより深い議論については例えば文献 1) の 4 章を参照されたい．

*5）「系の状態に同じ重みを与える」とは状態が離散的な量子力学では明らかだが，古典力学では自明ではない．以下の議論は量子力学の枠内で考えたほうが明解である．

*6） ミクロカノニカル分布の根拠としてエルゴード性があげられることが多いが，（少なくとも字義通りの）エルゴード性が根拠になるとは思われない．というのは，回帰時間が宇宙年齢よりもはるかに長いためである（室温における分子の平均速度を考えれば，たった一個の分子が容器内のあらゆる場所を経巡るだけでも一月から一年はかかることがわかる．これが 10^{22} 個のすべての分子について起こるに要する時間は…）．一方，我々が気体の圧力などを測定する場合，いくら長く見積もっても測定時間は 1 秒以下である．このような短い時間では，系の状態は全状態のホンの一部分しか経巡っていないはずで，それでもほぼ一定の測定値が毎回返される理由を考えるべきである．なお，エルゴードの問題は数学的に非常に重要で，さらにその解析手法が物理にも大きな影響を与えていることは強調したい．

2.3 カノニカル分布

上では孤立した系を考えた．身の周りの状況を考えるため，系が外界と接している場合をこれから考える．外界は考えている系に対して非常に大きいものとし（熱浴），注目している系を系 A，外界を系 B と呼ぶ．系 A と系 B は分子運動などを通して，エネルギーのやり取りをし，最終的には結合系としての平衡状態に達するだろう．系 $A+B$ は孤立しているから，これにミクロカノニカル分布の考え方を適用するのは自然である．

系 A のエネルギーを E_A，系 B のエネルギーを E_B と書く．全系は孤立しており，総エネルギーは一定である：$E_A+E_B=E$（系 A と B の間の相互作用エネルギーは無視できるものとした）．E 一定のすべての状態に同じ重みを設定した場合，$E_A=\epsilon$ である系 A の一つの状態の重みはどのくらいになるだろうか？

この問題に答えるには系 B の状態のエネルギー分布を知る必要があるし，特殊な系では病的なことも起こりうる．ここでは以下のような典型的な仮定をおくことにする[*7]．

仮定 1　体積 V，粒子数 N の系でのエネルギー E を持つ状態の数 $\Omega_{V,N}(E)$ は，$V\to\infty$ のとき

$$\Omega_{V,N}(E)\approx N!\,\exp[Va(N/V,E/V)] \tag{2}$$

を満たす．ここで $a(x,y)$ は y について増加，x,y の両方について上に凸な関数である．

上の仮定は（粒子密度 N/V とエネルギー密度 E/V が一定の場合）体積 V が非常に大きい系の状態数は（粒子の入れ替えを表す $N!$ を除けば）V に関して指数関数的に増大すること（指数の肩の係数が $a(N/V,E/V)$）を主張する．

*7） この仮定はかなり一般的に成り立つことが示される．文献 1) の付録 B などを参照．

これを用いて系 $A+B$ を考えよう．系 A の一つの状態 j（エネルギーは E_j）を固定すると，系 B で許されるのは $E_B = E - E_j$ のエネルギーを持った状態である．つまり，許される系 B の状態の数は $\Omega_j := \Omega^B_{V_B,N_B}(E-E_j)$ である．系 $A+B$ の総エネルギーが E である状態の総数は $\Omega = \sum_j \Omega_j$ だから，系 A の状態 j の実現確率は $p_j = \Omega_j/\Omega$ で与えられるはずだ．以下，この量を計算する．

仮定によれば，Ω_j は

$$\Omega_j \approx N_B! \exp\bigl[V_B\, a(N_B/V_B, (E-E_j)/V_B)\bigr]$$

と近似できる．系 B は実質，無限大であるとして，粒子数密度 $N_B/V_B =: \rho_B$ と総エネルギー密度 $E/V_B =: \epsilon_B$ を一定にしたまま，$V_B \gg 1$ の場合を考えると，

$$\begin{aligned}\Omega_j &\approx (\rho_B V_B)! \exp\bigl[V_B\, a(\rho_B, \epsilon_B - E_j/V_B)\bigr]\\ &\approx (\rho_B V_B)! \exp\bigl[V_B\, a(\rho_B, \epsilon_B)\\ &\qquad - E_j \partial_2 a(\rho_B, \epsilon_B)\bigr] \quad (3)\end{aligned}$$

と近似できる．第2行に行く際には，a を第2引数についてテイラー展開した1次までをとった（$\partial_2 a$ は関数 a の第2引数についての偏微分）．

これから $p_j = \Omega_j / \sum_i \Omega_i$ を計算すると

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}, \quad Z := \sum_j e^{-\beta E_j},$$

$$\beta := a(\rho_B, \epsilon_B) \qquad (4)$$

が得られる．これが**カノニカル分布**である．仮定1により $\beta > 0$ であるが，これは理想気体の系などを具体的に考察することにより，温度の逆数（正確には k_B をボルツマン定数，T を通常の単位での温度として $\beta = (k_B T)^{-1}$）であることがわかる．カノニカル分布における期待値は当然，

$$\langle F \rangle^{\mathrm{C}} := \frac{1}{Z} \sum_j F_j e^{-\beta E_j} \qquad (5)$$

と定義する．

粒子数の変化も許した**グランドカノニカル分布**もよく使われるが，（典型的な系のマクロな量に関する限り）ミクロカノニカル，カノニカル，グランドカノニカルの3つの分布は同等である．

3. 大数の法則と高温での気体の振舞い

このように統計力学の数学的構造は，特定の重み（ミクロカノニカル分布ならすべての状態に等確率，カノニカル分布ならエネルギー E の状態に $e^{-\beta}/Z$ の確率）をもった確率論そのものである．この節では，大数の法則や中心極限定理が，統計力学の一側面とどう結びついているかを紹介する．

3.1 大数の法則と中心極限定理

確率論の重要な概念の一つに事象や確率変数の独立性がある．2つの事象 A, B は $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ であるとき，**独立**であるという．ここで $\mathbb{P}[A]$ は事象 A が起こる確率であり，$A \cap B$ は A と B が共に起こる事象（**積事象**）である．

同様に，2つの確率変数 X, Y の実現確率がお互いの値によらないとき，つまり，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbb{P}[\{X \le a\} \cap \{Y \le b\}] = \mathbb{P}[X \le a]\,\mathbb{P}[Y \le b]$ であるとき，この確率変数は**独立**であるという．より一般に，n 個の確率変数は，それぞれの値の実現確率が互いの値によらないとき，独立という．独立な確率変数に対しては，以下のような著しい性質がある．これは初等確率論では最も重要な結果といってもよいだろう．

定理1（大数の弱法則） $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ を独立かつ同分布（同じ確率分布に従う）の確率変数の組とする．X_j の期待値は μ，標準偏差は σ としよう．このとき，X_j の平均 $M_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ は，任意の $\epsilon > 0$ に対して，以下を満たす：

$$\mathbb{P}\bigl[|M_n - \mu| > \epsilon\bigr] \le \frac{\sigma^2}{n\,\epsilon^2}. \qquad (6)$$

定理2（中心極限定理） 定理1の状況の下で，n 個の X_j から定義される以下の確率変数

$$Y_n := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \bigl(X_j - \mu\bigr) \qquad (7)$$

の分布は，$n \to \infty$ で標準正規分布に近づく．すなわち，任意の $a < b$ に対して，以下が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[a < Y_n < b\big] = \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}. \tag{8}$$

多数の独立な確率変数の平均はそれぞれの確率変数の期待値に近いことを保証するのが大数の弱法則である．また，中心極限定理は大数の法則の精密化とも考えられ，確率変数の平均と期待値の誤差が $1/\sqrt{n}$ のオーダーであることを教えてくれる．これらの定理は，確率変数 X_j が独立であるなら，同分布でない場合にも自然に拡張できる．また，独立性が少し破れている場合にも拡張は可能である（一例は 4 節参照）．

3.2 高温での気体との関係

大数の法則と中心極限定理の効果は，身の周りの物質でも納得できる．例として，容器に閉じ込めた室温での酸素を考え，その密度がどのくらい揺らぐかを考えよう．少し恣意的だが，酸素分子間の平均距離を l として，容器を一辺 l の微小な立方体に分ける．j 番目の小立方体に入っている分子の数を X_j と書くと，$X_j = 0, 1, 2, \cdots$ である．さらに，小立方体の大きさから，X_j は 0 か 1 の値をとっていることが多いと考えられる．

さて，分子運動の激しさを考えると，小立方体がある程度離れていれば，その中の分子の数はほとんど独立と思ってよいだろう．つまり，X_j は近似的に独立な確率変数とみなしても良さそうである[*8)]．となると，この X_j の平均に対して大数の法則が（近似的に）適用できるだろう．例えば一辺が 1 cm の小さな領域を考えると，この中の気体分子の密度 ρ は，

$$\rho = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \tag{9}$$

と書ける．一辺 1 cm の領域中にはロシュミット数程度，つまり 3×10^{19} 個くらいの分子が入っており，これが小立方体の数 N でもある．中心極限定理によれば，もし X_j が独立ならば，ρ の相対的な揺らぎはだいたい $O(1/\sqrt{N}) \approx 10^{-9}$ となる（X_j の独立性の仮定をより良く満たすために，l を 10 倍程度に大きくとったほうがよいかもしれない．その場合には揺らぎのオーダーは 10^{-8} 程度になる）．これは非常に小さな値であり，我々がところどころで空気が薄くなっている心配など全くしなくて良いことに合致している．

また，これはミクロカノニカル分布で考えている状態が「ほとんど同じ」ことの傍証にもなっている（密度に注目する限り，圧倒的に多数の状態は同じ密度を与えることが示されている）．

4. 相転移

前節では大数の法則などが現れる例として，系の構成要素の独立性が強い場合を見た．この節ではその反対，系の構成要素が強く相互作用している場合を主に考える．確率論の言葉でいえば，確率変数が非常に強い相関を持っている場合に対応する．例として，数学的研究が最も進んでいるイジングモデル（磁性体のモデル）を取り上げる．

d-次元の超立方格子 $\mathbb{Z}^d$（各座標が整数である d-次元空間の点の集合）の一部（例えば一辺 $L \gg 1$ の超立方体）Λ を考える．これは現実世界の結晶をモデル化したものである．Λ の各点 x にはスピンと呼ばれる確率変数 σ_x が乗っている．簡単のため σ_x は ± 1 の値のみをとるものとしよう（$+1$ はこのスピンが z 軸の $+$ 方向を向いている状態，-1 は z 軸の $-$ 方向を向いている状態）．隣り合ったスピン間には，互いに向きを揃えようとする相互作用が働き，そのハミルトニアン（エネルギー）は

$$\mathcal{H}(\sigma) = -\sum_{\langle x,y\rangle} \sigma_x \sigma_y \tag{10}$$

で与えられるものとする．ここで和は隣り合ったスピンのペアについてとる．この系の統計力学的期待値はカノニカル分布の定式化によって

$$\langle\cdots\rangle := \frac{1}{Z}\sum_{\{\sigma=\pm1\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)}(\cdots) \tag{11}$$

で与えられる（各 σ_x が ± 1 の値をとるすべての

*8) 容器内の総分子数 $\sum_j X_j$ は一定だから，X_j は厳密な意味では独立な確率変数にはなり得ない．独立とみなして良いかは全く自明ではなく，きちんと考察すべきである．

可能性について和をとる）．以下，この期待値について考えよう．

まず，$\beta = 0$（高温の極限）の場合．スピン変数は完全に独立であるので，独立・同分布の確率変数の問題である．特に全スピンの和 $S_\Lambda := \sum_{x\in\Lambda}\sigma_x$ に対して，3 節の大数の法則，中心極限定理などが成り立つ．S_Λ は $\sqrt{|\Lambda|}$ のオーダーであり（$|\Lambda|$ は Λ 内のスピンの数），これは $|\Lambda|$ に比べて極端に小さいから系は磁石になっていない．

次に，$\beta = \infty$（絶対零度）の場合．$\mathcal{H}(\sigma)$ の値が最小になるスピン配置，つまり $\sigma_x \equiv 1$ または $\sigma_x \equiv -1$ の 2 つの配置のみが期待値に寄与する（それ以外のスピン配置は相対的に小さいので効かない）．この場合にはすべてのスピンが揃って $+1$ か -1 かを確率 $1/2$ ずつでとる．全スピンの和 S_Λ は $\pm|\Lambda|$ であり，これは系が磁石になっていることを表すと解釈できる．

このように，このモデルは $\beta = 0$ と $\beta = \infty$ では全く異なる様相を呈する．では，これら両極端の中間ではどうだろうか？

$0 < \beta \ll 1$ の場合はスピン変数は完全には独立ではないが，相互作用が弱いため，$\beta = 0$ の場合と定性的には似た振舞いが見られる．実際，全スピンの和について，定理 1, 2 に類似の大数の法則や中心極限定理が証明されている[*9)]．

$\beta \gg 1$ の場合は $\beta = \infty$ と同じと思いたくなるが，それほど簡単ではない．答えは空間の次元に依存し，1 次元では $\beta \gg 1$ であっても高温側と定性的に同じであることがわかっている．

一方，2 次元以上では，β がある程度大きければ，$\beta = \infty$ と定性的に似た振舞いをする．Λ が無限に大きくなった極限で全スピンの平均 $S_\Lambda/|\Lambda|$ の確率分布を見ると，ある β_c（相転移点）を境にして，$\beta < \beta_c$ では原点中心の一山の分布，$\beta > \beta_c$ では二山の分布，となることが証明される．このモデルでは β_c を境にして磁石である相（$\beta > \beta_c$）と磁石でない相（$\beta < \beta_c$）が入れ替わるのである[*10)]．このような現象を**相転移**という．

*9）　これは $\beta < \beta_c$（β_c は臨界点）全域で示されている[3)]．

*10）　詳しくは，例えば文献 1) の 11 章や文献 2) を参照．

簡単なモデルであるとはいえ，自然なミクロの相互作用を仮定したモデルで相転移の存在が示されたことには大きな意義がある．

5. ランダムウォークとブラウン運動

これまでは系の平衡状態を主に考えてきた．最後に，時間変化を伴った問題の例として，ブラウン運動と拡散現象を考えよう[*11)]．今，部屋の片隅に香水の瓶をおいてふたを開けたとする．部屋のもう片隅で香水のにおいが感じられるまでにはどのくらいの時間がかかるだろうか？（実際にこのような状況を考えると，部屋の中の気流の流れ（対流）による効果が一番大きくなるだろうが，ここでは対流の効果は考えない．）

香水の粒子は空気の分子から激しく衝突され，いろいろな方向にはねとばされる．はねとばされて，香水粒子が段々と部屋の中に拡がっていくわけだ．このように拡がっていく現象を**拡散現象**という．また，個々の粒子の運動は典型的な**ブラウン運動**と呼ばれる現象の一例になっている．以下，この現象をモデル化して考える．

香水粒子は，空気の分子との衝突のたびにその方向を変えるので，数回〜数十回の衝突の後には，分子はそれまでの速度の記憶をほとんど失っていると思われる．つまり，数回〜数十回程度の衝突を行う時間間隔を t_0 とすれば，時間間隔 t_0 くらいで観測した分子の速度の向きはほぼ，ランダムだと思ってよいだろう．一方，速度の大きさもランダムであろうが，香水粒子の運動エネルギーは周囲の空気分子の運動エネルギーと同程度であろうと考えられる（もし，同程度でなければ，香水粒子と空気分子の間で運動エネルギーのやり取りが行われ，最終的には両者の運動エネルギーは同じ程度になる）．

そこで，このような香水分子を時刻 $t = nt_0$（n は非負の整数）においてのみ観察し，時刻 $t = nt_0$ で

*11）　ここで考えているのは，ほぼ平衡状態の環境の中で相対的に少数の分子が目に見える変化を起こしているものであり，真の非平衡とはほど遠いものである．

の香水分子の位置を $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(t)$ と書こう．$t = nt_0$ から $t = (n+1)t_0$ の間にも香水分子は運動を続けているが，あえて t_0 の整数倍の時刻での位置だけを見るのである．

時刻 $(n-1)t_0$ から nt_0 の間に香水分子が動いた変位を $\boldsymbol{v}_n$ とする．上の仮定から，$\boldsymbol{v}_n$（$n = 0,1,2,3,\cdots$）は互いに独立かつ同分布なベクトル値確率変数とみなすことができる．任意の $n \geq 0$ において $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{v}_n$ が成り立つので，

$$\boldsymbol{x}_n = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j \tag{12}$$

と表せる．これは確率論において**ランダムウォーク**として研究されているものになっている．

$\boldsymbol{v}_j$ は独立・同分布であるから，$\boldsymbol{x}_n$ の期待値や分散は簡単に計算できる．$\boldsymbol{v}_n$ は等方的に分布していてその期待値はゼロ（特定の方向に跳ぶ傾向はない），またその分散は正の数（これを σ^2 と書く）であろう．また，$\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$（$i \neq j$）は独立だから

$$\langle \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \boldsymbol{v}_i \rangle \cdot \langle \boldsymbol{v}_j \rangle = 0 \tag{13}$$

のはずである（$\cdot$ はベクトルどうしの内積を表す）．従って，期待値についての線型性から，

$$\langle \boldsymbol{x}_n \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}_j \rangle = 0, \tag{14}$$

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{x}_n] = \sum_{i,j} \langle \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \rangle = \sum_{j} \sigma^2 = n\sigma^2 \tag{15}$$

が成り立つ．ここで著しいのは，t_0 を単位にして計って時間が n 経過したとき，$\boldsymbol{x}_n$ は大体，$\sqrt{n}$ のオーダーであることである．変位の程度が，時間（n）に比例せずその平方根に比例するこの現象は拡散現象に特有のものであり，**Einstein の関係式**と呼ばれる．冒頭の香水の問題に戻れば，部屋の大きさが L 倍になれば，香水が端に達するまでの時間は L^2 倍になるということだ．

なお，今の状況はまさに 3 節の大数の法則や中心極限定理が成り立つ状況に他ならないので，もっと詳しい情報も得られる．例えば，$\boldsymbol{x}_n$ の分布については定理 2 の類似物が成り立つ（これは確率論では**局所中心極限定理**と呼ばれる）．

以上では簡単のために，時間間隔 t_0 を導入して，実質的に時間間隔 t_0 ごとにジャンプする過程を考えた．しかし，t_0 がゼロになった極限（より実際の香水分子の運動に近い）を数学的に定義することもできる．これは数学でもブラウン運動と呼ばれ，確率論の中心的題材の一つになっている．

6. 最後に

本稿では，統計力学と確率論の関係について，特に初等的な部分に限って紹介した．統計力学と確率論は密接に関係しており，互いに刺激し合って発展してきた．その傾向は特にこの 30 年くらい著しいが，未解決の問題がまだまだ残っている．一例を挙げれば，相転移およびそれに関連した臨界現象は数学的にも非常な難問で，活発な研究が行われている．しかし我々に最も身近な水が気相と液相間の相転移を示すことすら，数学的には示されていない（長距離相互作用を導入して気相・液相転移を証明した[4]のが現在のところ最良の結果である）．非平衡の統計力学はまだまだその揺籃期にある．さらにいえば，2 節で触れた統計力学の基礎付けには不満が残る．統計力学と確率論の研究がさらに緊密になり，手を携えてこれらの大問題を解決していくことを期待したい．

参考文献

1) 田崎晴明『統計力学 I, II』（培風館）(2008).
2) 田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版，近刊予定）.
3) C.M. Newman, *Commun. Math. Phys.* **74** (1980) 119–128; *Commun. Math. Phys.* **91** (1983) 75–80.
4) J.L. Lebowitz, A.E. Mazel and E. Presutti, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4701–4704.

（はら・たかし，九州大学大学院数理学研究院）

電磁気学と代数解析

高崎　金久

1. はじめに

記事の執筆依頼の際に私に課された「電磁気学と代数解析」というテーマはかなり意表を突いている．編集部は今回の特集を企画するにあたって，電磁気学に関しては「電磁気学とベクトル解析」というごく普通の（しかし，ベクトル解析が微分方程式と並んで解析学の重要な一分野である，という誤解*1)を伴った）テーマを考えたのだが，この特集のとりまとめ役の伊東恵一氏の提案によって「電磁気学と代数解析」に変わったらしい．確かに私は代数解析とその数理物理への応用を研究しているが，このテーマは私には全くの謎だった．そこでテーマを変えて「電磁気学と微分形式」というような表題で原稿を書き始めたが，あまりおもしろい話にならず，結局「電磁気学と代数解析」に戻して伊東氏の謎かけを正面から受けて立つことにした．

伊東氏の「代数解析」という言葉は現代的な代数解析，すなわち，1960年代後半に佐藤幹夫氏を中心にして始まった研究分野*2)を指すと思われるが，数学史的には「代数解析」は別のものを意味する．すなわち，ニュートンやライプニッツに始まる無限小解析（infinitesimal analysis）あるいはオイラーが言うところの無限解析（infinite analysis）に対して，代数的な計算だけで問題を解くやり方を代数解析という．そこにはデカルト流の解析幾何学も含まれる*3)．このような意味での代数解析は現代の代数解析と無関係ではない．微分積分法（calculus）も，ϵ-δ 論法による裏付け（これはかなり後の時代になって初めて行われたことである*4)）を省いて公理的に解釈すれば，現代の代数解析に一歩近づく（ϵ-δ 論法を重視する立場からは一歩後退であるが）．また，ラグランジュは『解析函数論』（Théorie des fonctions analytiques）においてべき級数によって微分積分法の基礎付けを試みたり*5)，べき級数を用いて様々な計算を行う方法を編み出したりしているが，これも現代の代数解析に通じる考え方である．

現代の代数解析では解析学に内在する高度の代数的構造を前面に出し，それらを足場にして解析学や数理物理学の諸問題を取り扱う．そこでは超函数やマイクロ函数などの一般化された函数概念（コホモロジーの言葉で定式化される），微分作用素のなす非可換環と

*1)　学部学生ならばそのように考えてしまうかもしれない．京都大学では「微分積分学続論 A」という科目でベクトル解析を，また「微分積分学続論 B」という科目で常微分方程式を扱う．

*2)　佐藤氏の 60 歳・70 歳を記念する論文集 1, 2) には代数解析の成果の詳しい解説がある．

*3)　公理・公準から出発して目標の定理まで図形的証明を進めるユークリッド流の幾何学を「総合幾何学」という．「解析幾何学」（これはデカルトよりも後の時代の用語である）はそれに対するアンチテーゼである．ニュートンが力学に関する著書『自然哲学の数学的諸原理』において総合幾何学的方法を採用したことはよく知られている．

*4)　微分積分法の草創期には，無限小の数が存在すると考えて，それを用いて話を展開したので，当然その正当性に疑いが生じた．コーシーはそのような微分積分法を厳密に基礎付けるべく『解析教程』（Cours d’analyse）と『無限小解析概論』（Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal）を書いたことで知られるが，その中でも依然として無限小概念は生き残っている．ただし，コーシーは無限小というものを有限の数 h を 0 に近づける（$h \to 0$）過程として捉えているので，実質的には現代と同じ段階に達している．なお，『解析教程』は「代数解析」という副題をもつが，その内容は連続函数・数列・級数論と複素数・多項式・代数方程式論からなる．その意味で内容の半分は代数解析なのである．

*5)　正当性の疑わしい無限小の数の使用を嫌ったのである．ただし，当初はべき級数の収束性を考慮していなかった．その意味ではラグランジュの「解析函数」は今日の解析函数ではない．ラグランジュの「解析的」とは当時の意味で代数解析的ということなのだろう．

その上の加群，導来圏や導来函手などの圏論的概念，リー群・リー代数やそれらの量子変形に関する表現論的概念などを駆使する．伊東氏もその意味で代数解析という言葉を用いているはずである．問題はそこに電磁気学がどのように関わるかということなのだが….

そこで思い出したのは，超函数や微分方程式の研究によって代数解析の発展に草創期以来重要な貢献をされ，近年は数学史研究に打ち込んでおられる小松彦三郎氏のことである．小松氏は実は私の学部・修士課程時代の指導教員だったのだが（したがって，本当は「小松先生」と書きたいが，この記事では「小松氏」で通す），19 世紀の電磁気学において異彩を放つヘヴィサイド（O. Heaviside, 1850–1925）の人物像と業績を著書・講演等[3~6]で紹介する一方で，ヘヴィサイドの「演算子法」を超函数論の枠組みで正当化する研究[7~9]も行っている．ヘヴィサイドの数学こそ「電磁気学と代数解析」にふさわしい話題ではないだろうか．

そういうわけで，以下ではヘヴィサイドの数学の中に代数解析とのつながりを探ることにする．ただし，以下に書くことの大半（特に，重要なこと）は最後に掲げた参考文献からの受け売りである．読者のお許しを乞いたい．

2. ヘヴィサイドとベクトル解析

ヘヴィサイドはマクスウェル（J.C. Maxwell, 1831–1879）の次の世代に属しているが，電磁気学の基礎固めからその応用に至るまで幅広い業績を残している[10,11]．特に，マクスウェルの電磁気理論を今日教科書で学ぶ形（いわゆる**マクスウェル方程式**）に整理したのは実はヘヴィサイドである．また，その過程で必要になる数学的言語であるベクトル解析も作り上げた．ベクトル解析はハミルトン（W.L. Hamilton）やグラスマン（H.G. Grassmann）のベクトル算法に関する先駆的研究から発して，ヘヴィサイドやギブス（J.W. Gibbs, 1839–1903）によって今日見られる形に完成したのである．

現代の電磁気学の教科書では（流儀や単位系の違いを別にすれば）マクスウェル方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

というような形に書かれている．ここで $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は電場と磁場，$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ は電束密度と磁束密度，$\rho, \boldsymbol{j}$ は電荷密度と電流密度を表す．対称性の観点から (1) と (3) に磁荷密度 ρ_m と磁流密度 $\boldsymbol{j}_m$ の項を加えることもある（これはヘヴィサイド自身が行ったことのようである）．$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ は誘電率 ϵ と透磁率 μ （真空中では定数 ϵ_0, μ_0 になる）を係数として

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5}$$

という関係にある．

「ナブラ」と呼ばれる記号 $\boldsymbol{\nabla}$ はベクトル解析を象徴するもので，空間座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ （共変性の観点からは添え字を上付きにすべきだが，今はこれで済ませる）に関する微分演算子の組

$$\boldsymbol{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を表す．それが $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ などのベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ （共変性の観点では，ここでも添え字の位置に微妙な問題が生じる）に対して

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}\\ &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\end{aligned}$$

ならびに

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$$

というように作用する．これらはベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**回転**，**発散**と呼ばれ，$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$ という記号でも表される．ちなみに，$\boldsymbol{\nabla}\times$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ という記法はギブスが，またベクトルを太字で表す記法はヘヴィサイドが導入したものだそうである[11]．$\times$ と $\cdot$ はもともと 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の**外積**（**ベクトル積**）$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ならびに**内積**（**スカラー積**）$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ を表す記号であるが，ここでは $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{\nabla}$ に置き換えているわけである．

実際には，マクスウェルが 1873 年に出版した教科書『電磁気論考』（A Treatise on Electricity and Magnetism）において書いているのはこの 4 つの方程式ではなくて，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ も入り交じった方程式である[10,11]．また，そこには (3) が欠落している．ヘヴィサイドは (3) を補って

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6}$$

という関係にある $\boldsymbol{A}, \phi$ を消去し，最終的に 4 つの方程式 (1), (2), (3), (4) を導いた．電磁波の実証実験で知られるヘルツ（H.R. Hertz, 1857–1894）も別の方向から同じ方程式を得たが，先取権をヘヴィサイドに譲った[11]．

こうしてマクスウェルの電磁気理論はヘヴィサイドらによって今日知られる形に整備された．それを支えた数学がベクトル解析であるが，ベクトル解析をこのように使いやすい形に整備したこと自体がヘヴィサイドやギブスの功績なのである．

ベクトル解析は解析学の中にハミルトンやグラスマンのベクトル算法を持ち込んだものである．その意味ではベクトル解析も代数＋解析という意味で代数解析のようなものかもしれない．しかしこれはまだ駄洒落に近い．本当の意味での代数解析とのつながりはやはり演算子法に求めなければならない．

3. ヘヴィサイドと演算子法

この節は内容的にほとんど小松氏の講演録や解説論文[4,6]の丸写しになってしまうが，お許し願いたい．

ヘヴィサイドは最初は電信技師として働いていたが，辞職してマクスウェルの電磁気理論の研究に入り，その応用として電信用ケーブルの理論的解析を行った．海底に敷設する電信用ケーブルは芯線を絶縁体で包み，それをさらに鞘状の導体で包んだ構造をしている（いわゆる同軸ケーブルである）．ヘヴィサイドはケーブルを伝わる信号の方程式として

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = Ru + L\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (7)$$

という微分方程式を立てた．ここで u, v は芯線の各点（変数 x を座標とする）での電流と電圧である．また，R, C, L, G は定数で，それぞれ芯線の単位長さあたりの電気抵抗，電気容量，自己誘導，芯線と鞘の間の漏洩電導度である．この連立方程式から u を消去すれば

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(R + L\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(G + C\frac{\partial}{\partial t}\right) v \qquad (8)$$

という単独方程式が得られる．u も同じ形の方程式を満たす．これらの方程式を**電信方程式**という．

ヘヴィサイドは独自に編み出した方法によってこれらの微分方程式の解を求めて，R, C, L, G とケーブルの性能の関係を明らかにした．これらの定数が

$$RC = LG \neq 0 \qquad (9)$$

という条件を満たすときには (8) は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{L}\right)^2 v \qquad (10)$$

という形に書き直せる．ヘヴィサイドはその解がケーブルの始点 $x = 0$ での電圧

$$v(0, t) = \phi(t) \qquad (11)$$

を用いて

$$v(x, t) = e^{-\sqrt{RG}x}\phi(t - \sqrt{LC}x) \qquad (12)$$

と表せることを見出した．この解の表示から，信号はケーブルの始点から遠ざかるにつれて $e^{-\sqrt{RG}x}$ のように減衰するが，その波形は変わらず（すなわち「歪み」がない），一定速度 $\sqrt{LC}$ で伝わって行く，ということがわかる．これは電信用ケーブルとしては最も望ましい特性であり，上の条件 (9) は**無歪条件**と呼ばれる．さらに，ヘヴィサイドは無歪条件が満たされない場合の解も求めている．それは指数函数とベッセル函数からなる核函数を用いて積分変換の形で表されている．

ヘヴィサイド以前にはこのような偏微分方程式の解法の研究[12]はあまり進んでおらず，熱伝導の方程式（**熱方程式**）に対するフーリエの研究があるのみだった．(8) は $L = G = 0$ の場合には

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (13)$$

となるが，これは熱伝導の方程式と同じ形をしていて，その場合に知られていた解法が利用できる．これが電信実用化の際にトムソン（W. Thomson, 1824–1907, 爵位を得てケルヴィン卿となった）らによって提案された電信用ケーブルの設計理論である．ヘヴィサイドは (13) に基づく既存の設計理論の妥当性に疑問を感じて*6)，L, G を取り入れた電信方程式を立てた．そのためにまずマクスウェルの電磁気理論を理解する必要があったのである*7)．そうして得られた微分方程式を

*6) ヘヴィサイドは電信技師としての経験からそのように考えたらしいが，偏微分方程式の分類の観点から見ても[12]，(13) は放物型であるのに対して，$LC \neq 0$ の場合の電信方程式は双曲型であり，両者は全く異なる性格をもつ．

*7) 無歪条件 (9) の前提となる $L \neq 0$ という条件はケーブルが自己誘導効果をもつことを意味する．自己誘導は一種の慣性であり，電流から生じた磁場の時間的変化が電流に対して逆方向の起電力を生じる効果である．この効果を正しく理解するにはマクスウェルの電磁気理論が必要だが，(13) に基づく設計理論を立てた人たちはそもそもマクスウェルの電磁気理論を認めていなかった．

今度は何とかして解かなければならない．電信方程式のような偏微分方程式を解く方法はほとんど知られていなかったので，ヘヴィサイドは自力で解法を開発した．そのような解法を集大成したのが**演算子法**である．

演算子法はヘヴィサイドの数学的業績としてはベクトル解析よりもはるかに革新的であり，当時の人々には容易に受け入れがたいものだった．もともとヘヴィサイドによる定式化は厳密性からほど遠く，不用意に用いればすぐに矛盾が生じてしまう．もっとも，ヘヴィサイド自身はそのことをあまり気にしなかったようである．

20 世紀に入ると，以下のような演算子法の正当化・解釈の試みが現れる．

- **ラプラス変換を用いる方法**：最初に登場したのはラプラス変換を用いる方法である．この方法は定数係数常微分方程式を扱うには便利であり，工学では今もさかんに用いられているが，基礎付けを一般的に行おうとすれば，ラプラス変換の定義域と値域の設定に関して難しい問題が生じる．また，原理的な問題として，普通の函数のラプラス変換を考える限り，微分演算子をヘヴィサイドの意味の演算子として直接に扱うことができない．
- **抽象代数を用いる方法**：次に登場して一つの決定版となったのは，ミクシンスキー（J. Mikusiński）による定式化である[13]．そこでは半直線 $[0,\infty)$ 上の連続函数の空間 $\mathcal{C} = C([0,\infty))$ にたたみ込み積 $f * g$ を導入し，それが零因子をもたない，というティッチマーシュ（E.C. Titchmarsh）の定理に基づいて $\mathcal{C}$ の商体 $\mathcal{Q}$ を考える．そしてこの商体の中にヘヴィサイドの演算子を実現する．この代数的な方法については吉田耕作による解説[14]もある．
- **超函数論を用いる方法**：シュワルツ超函数（distribution）の理論を創始したシュワルツ（L. Schwartz）はその超函数論を用いて演算子法を説明した[15]．シュワルツの解釈のウルトラ超函数（ultradistribution）への一般化もある[16]．小松は佐藤超函数（hyperfunction）による解釈を与えて[7,8]，それが偏微分方程式にも使えることを示した[9]．なお，これらはいずれもラプラス変換を超函数に拡張して用いている．

4. 演算子法の考え方

具体的な方程式の例を用いて，超函数論から見た演算子法の考え方を説明しよう．超函数の言葉を使えば，ヘヴィサイドが言いたかったことはもっと明確になる．超函数に関するある程度の知識[17,18]は仮定する．

ヘヴィサイドの意図を理解するには，やはり電気回路から例を選ぶのがいいだろう．そこで，電気回路の教科書でおなじみのコイル（自己誘導 L），抵抗器（電気抵抗 R），コンデンサ（電気容量 C）と起電力 $F(t)$ を直列に接続した LRC 回路を考えることにする（L, R, C は定数とする）．回路を流れる電流 $u(t)$ の時間変化は

$$L\frac{du}{dt} + Ru + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(s)ds = F(t) \tag{14}$$

という積分微分方程式に従う．これを t で微分して得られる微分方程式

$$L\frac{d^2u}{dt^2} + R\frac{du}{dt} + \frac{u}{C} = f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \tag{15}$$

は力学的な振動子としても解釈できる．L は質量，$1/C$ はばね定数，R は抵抗係数，$f(t)$ は外力に相当する*8)．

このような方程式を演算子法で扱うときには，

$$F(t) = 0 \quad (t < 0)$$

という条件を満たす（つまり $t = 0$ でスイッチを入れた）起電力に対して

$$u(t) = 0 \quad (t < 0)$$

という条件を満たす解のみを対象にする．このような解は，原因（起電力）が生じないうちは結果（電流）も生じない，という意味で**因果律を満たす解**と呼ばれる．特に起電力が階段状の**ヘヴィサイド函数**

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \tag{16}$$

（ヘヴィサイドは単に 1 あるいは $1(t)$ と表した）で与えられる場合が基本的である．このとき (15) の右辺にはディラック（P.A.M. Dirac）*9)の**デルタ函数**

$$\delta(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{17}$$

が現れる（ヘヴィサイドは $\theta(t)$ の導函数を**衝撃函数**と呼んだが，当然のことながら，その取扱いには苦労したようである）．この意味で $F(t) = \theta(t)$ の場合の解 $u(t) = K(t)$ は偏微分方程式論でいう**基本解**[12]に相当する．一般の解はこの基本解 $K(t)$ を核函数とする積

*8) 自己誘導が慣性とみなせることはこれからもわかる．

*9) デルタ函数を導入したディラックがヘヴィサイドと同じ電気工学の出身であることは偶然とは思えない．

分変換

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t K(t-s)F(s)ds \tag{18}$$

で与えられる．因果律を満たす解に考察対象を限定することは物理的・工学的要請であるが，超函数論の中で演算子法を解釈する際にも本質的な意味をもつ．すなわち，ヘヴィサイドの演算子は $t < 0$ で 0 となる（つまり台が $t \geq 0$ に含まれる）函数や超函数に作用するものとして理解されるべきなのである．演算子法の解釈にフーリエ変換ではなくてラプラス変換が用いられるのもこのためである．

演算子法では d/dt を抽象的な記号 p に置き換える．これによって (14) は

$$(Lp + R + C^{-1}p^{-1})u = F(t) \tag{19}$$

という形に表現される．p^{-1} が積分演算子として解釈されている

$$p^{-1}u(t) = \int_0^\infty u(s)ds$$

ということに注意されたい．前述の意味での基本解は

$$(Lp + R + C^{-1}p^{-1})u = \theta(t) \tag{20}$$

の因果的な解である．演算子法でそれを求めるには，u の前の演算子

$$A(p) = Lp + R + C^{-1}p^{-1}$$

を有理式のようにみなして，その逆 $A(p)^{-1}$ を部分分数展開し，

$$\frac{p}{(p-a)^n}\theta(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}\theta(t), \tag{21}$$

$$p^{-n}\theta(t) = \frac{t^n}{n!}\theta(t), \tag{22}$$

$$\frac{p}{p^2+a^2}\theta(t) = \frac{\sin(at)}{a}\theta(t), \tag{23}$$

$$\frac{p^2}{p^2+a^2}\theta(t) = \cos(at)\theta(t) \tag{24}$$

（$n = 1, 2, \cdots$ であり，a は 0 でない定数とする）などの公式（他にもいろいろある）を用いて展開の各項の $\theta(t)$ への作用を計算する．その計算を実演してみせる前に，これらの公式について少し補足しておこう．

ここに示した公式に現れているのはいずれも普通の意味の函数であるが，それはそのような函数を生じる演算子の例のみ示したからである．これ以外の演算子を作用させれば本当の超函数も現れる．例えば (22) の n を $-n$ に置き換えれば

$$p^n\theta(t) = \delta^{(n-1)}(\theta) \tag{25}$$

というようにデルタ函数とその高階導函数が現れる．一般に複素数 α に対して $p^{-\alpha}$ という演算子はヘヴィサイド函数に

$$p^{-\alpha}\theta(t) = \frac{(t^\alpha)_+}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{26}$$

と作用する．ここで $(t^\alpha)_+$ は $\alpha \geq 0$ の場合の $t^\alpha\theta(t)$ を α について解析接続し，極においては有限部分のみ取り出すこと（アダマールの正則化）によって得られる超函数で，$t \geq 0$ に台をもつ．いずれにせよ，演算子の作用は $t \geq 0$ に台が含まれる超函数の空間の上に定義される．この作用の定義やそれに基づく公式 (21)–(26) の導出は参考文献に譲る．

さて，上に述べた方針に従って実際に (20) を解いてみよう．ここで場合分けが必要になるが，紙幅が残り少ないので，素子が実質的に 1 個になる場合は除外する．

(i) $L \neq 0,\ C \neq \infty$ の場合

これは本当の意味での LRC 回路（$R = 0$ ならば LC 回路）である．(15) の特性根を α_1, α_2 と表せば

$$A(p)^{-1} = \frac{p}{L(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)} \tag{27}$$

である．$\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合には

$$A(p)^{-1} = \frac{1}{L(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{p}{p-\alpha_1} - \frac{p}{p-\alpha_2}\right)$$

と部分分数展開されるので，(21) を $n = 1$ の場合に用いて

$$A(p)^{-1}\theta(t) = \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{L(\alpha_1-\alpha_2)}\theta(t) \tag{28}$$

という形で (20) の解が得られる．$\alpha_1 = \alpha_2$（この値を α と表そう）の場合には

$$A(p)^{-1} = \frac{p}{L(p-\alpha)^2}$$

であるから，(21) を $n = 2$ の場合に用いて

$$A(p)^{-1}\theta(t) = \frac{1}{L}te^{\alpha t}\theta(t) \tag{29}$$

という解が得られる．これは $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合の解の $\alpha_1, \alpha_2 \to \alpha$ という極限に一致している．

(ii) $L = 0,\ R \neq 0,\ C \neq \infty$ の場合

これは実質的には RC 回路である．$A(p)$ の逆は

$$A(p)^{-1} = \frac{1}{R}\frac{p}{p+(RC)^{-1}} \tag{30}$$

であり，(21) を $n=1$ の場合に用いれば

$$A(p)^{-1}\theta(t) = \frac{1}{R}e^{-t/(RC)}\theta(t) \tag{31}$$

という解が得られる．この解から，電流は $t=0$ において $1/R$ の値で流れ始めて，その後は指数的に減少して行く，ということがわかる．R が 0 に近づけば，電流が多い時間は $t=0$ の付近に集中してくる．その極限はデルタ函数（の定数倍）である．実際，$R=0$ の場合に (20) を直接に解けば，

$$A(p)^{-1} = Cp \tag{32}$$

であるから

$$A(p)^{-1}\theta(t) = C\delta(t) \tag{33}$$

という解が得られる．要するに，回路に抵抗も自己誘導もなければ，コンデンサは一瞬で充電されるのである．

(iii) $L \neq 0,\ R \neq 0,\ C = \infty$ の場合

これは実質的には LR 回路である．$A(p)$ の逆は

$$A(p)^{-1} = \frac{1}{L}\frac{1}{p+R/L} \tag{34}$$

となり，(21) を $n=1$ の場合に 1 回積分した形の公式

$$\frac{1}{p-a}\theta(t) = \frac{e^{at}-1}{a}\theta(t) \tag{35}$$

を用いれば

$$A(p)^{-1}\theta(t) = \frac{1}{R}(1-e^{-Rt/L})\theta(t) \tag{36}$$

という解が得られる．

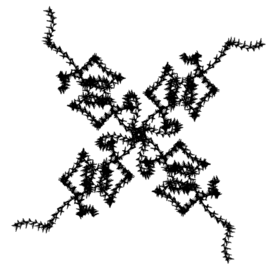
以上は定数係数常微分方程式の場合だが，偏微分方程式の場合も，例えば (13) の解は $e^{-\sqrt{RCp}\,x}$ という演算子値の指数函数を用いて表すことができるし，解析的により手強い (8) などの方程式を同様に取り扱うこともできる[6,9]．このように，演算子法は代数的な構造を用いて解析的な問題を解くという意味で（また，その基礎付けに超函数論が深く関わるという意味でも）まさしく代数解析そのものである．

参考文献

1) M. Kashiwara and T. Kawai (eds.), *Algebraic Analysis*, vol.I and II (Academic Press, 1988).
2) *Asian Journal of Mathematics* **2** (4) (1998), Special Issue to Honor Professor Mikio Sato on his 70th Birthday.
3) 小松彦三郎，『ベクトル解析と多様体 I, II』（岩波書店，1994 年）．
4) 小松彦三郎，「Laplace 超函数による微分方程式の解法」，数理解析研究所講究録 **935** (1996), pp.21–52.
5) 小松彦三郎，「ヘヴィサイドとテスラ」，学士会会報 **815**（学士会，1997），pp.50–59.
6) 小松彦三郎，「Heaviside の数学」，日本数学会 2003 年度企画特別講演．
7) H. Komatsu, “Laplace transforms of hyperfunctions — a new foundamtion of the Heaviside calculus”, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, **34** (1987), 805–820.
8) H. Komatsu, Operational calculus, hyperfunctions and ultradistributions, 文献 1) vol.I, pp.357–372.
9) H. Komatsu, Solutions of differential equations by means of Laplace hyperfunctions, M. Morimoto and T. Kawai (eds.), “Structure of Solutions of Differential Equations” (World Scientific, 1996), pp.227–252.
10) 太田浩一，『電磁気学 I, II』（丸善，2000 年）．
11) 太田浩一，「マクスウェルは世界を変えた」，数理科学 No.455（2001 年 5 月），9–18.
12) 金子晃，『偏微分方程式入門』（東京大学出版会，1998 年）．
13) J. Mikusiński, *Operational Calculus*, (Pergamon Press, 1959/1983).
14) 吉田耕作，『演算子法——一つの超函数論』（東京大学出版会，1982 年）．
15) L. Schwartz, Transformation de Laplace des distributions, *Medd. Lunds Math. Sem. Suppl.* (1952), 196–206.
16) J. Sebastião e Silva, “Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationel”, *Math. Ann.* **136** (1958), 58–96.
17) L. Schwartz（岩村・鈴木訳），『超函数の理論』，第 3 版（岩波書店，1971 年）．
18) 金子晃，『超函数入門』（東京大学出版会，1996 年）．

（たかさき・かねひさ，京都大学大学院人間・環境学研究科）

熱力学極限と漸近解析
ヤング図形の limit shape をめぐる話



中津　了勇

1. はじめに

私たちの日常の現象を支配している熱力学に対して，現象を引き起こすのは個々の微粒子の力学だというのが統計力学の立場である．大風呂敷を広げたタイトルだが，実のところ，ミクロ系の自由度やサイズを無限に大きくする熱力学極限あるいは無限体積極限をとることで，マクロ系の普遍的な振舞いを抽出するという統計力学の考え方を，筆者の身近にある簡単な題材で説明しようという小論である．ランダム分割と呼ばれる組合せ論的な統計模型を題材にする．もちろん，この模型の物理は何かなど（愚）問は発しないことにする．

2. ヤング図形の limit shape

整数の非増大列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ で，ある番号から先はすべて 0 であるものを**分割**と呼ぶ．$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ とすると，分割 λ は自然数 $|\lambda|$ を幾つかの自然数の和に表すやり方である．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ の中の 0 でない成分の個数を $l(\lambda)$ と書く．分割は**ヤング図形**を用いて視覚化できる．分割 λ に対応させて 1 行目に水平に λ_1 個の箱を，2 行目に水平に λ_2 個の箱を順次左端を合わせて並べたものをヤング図形と言い，図形も同じ λ で表すことにする．構成する箱の個数をヤング図形のサイズと言う．箱を単位正方形とすれば，ヤング図形の面積である．ヤング図形 λ のサイズは $|\lambda|$ に等しい．$l(\lambda)$ はヤング図形の上下の幅である．

n 次の対称群 S_n の既約表現は n の分割で分類できる．分割 λ に対応する S_n の既約表現の次元を d_λ とする．その鉤長公式が知られている．ヤング図形を構成する一つの箱 s に注目し，s から右と下に腕と脚を伸ばせば，s を折れ目とする鉤が得られるが，これに含まれる箱の数を $h(s)$ とする．d_λ の鉤長公式は次のように与えられる．

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{s\in\lambda} h(s)}. \tag{1}$$

$\mathcal{Y}_n$ をサイズ n のヤング図形全体の集合とする．**n 次対称群のプランシュレル測度**は，$\lambda \in \mathcal{Y}_n$ に対して

$$\mathrm{Prob}_n(\lambda) = \frac{d_\lambda^2}{n!} \tag{2}$$

として決まる確率測度である．(1) を用いることで

$$\mathrm{Prob}_n(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{s\in\lambda} h(s)^2} \tag{3}$$

と明示できる．n が大きい値のとき，(2) で確率分布するヤング図形の挙動を調べるのに，Prob_n の**ポアソン化**（$n = 0, 1, \dots$ をパラメタ t (> 0) でポアソン分布させる）は有効である．ヤング図形全体の集合を $\mathcal{Y} = \cup_n \mathcal{Y}_n$ とする．$\lambda \in \mathcal{Y}$ に対して

$$\mathrm{Prob}_t(\lambda) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}\mathrm{Prob}_n(\lambda), \quad n = |\lambda| \tag{4}$$

として決まる確率測度が Prob_n のポアソン化である．(3) を用いると次のように明示できる．

$$\mathrm{Prob}_t(\lambda) = \frac{e^{-t}t^{|\lambda|}}{\prod_{s\in\lambda} h(s)^2}. \tag{5}$$

(4) で確率分布するヤング図形のサイズや幅の平均 (E_t) と分散 (V_t) を求めよう．サイズについて，パラメタ t のポアソン分布から

$$E_t\big[\,|\lambda|\,\big] = t, \quad V_t\big[\,|\lambda|\,\big] = t. \tag{6}$$

確率測度の対称性から，上下の幅と左右の幅の平均，分散は等しくなる．主対角線を軸に裏返してちょうど重なるとき，2 つのヤング図形は共役であると言う．λ に

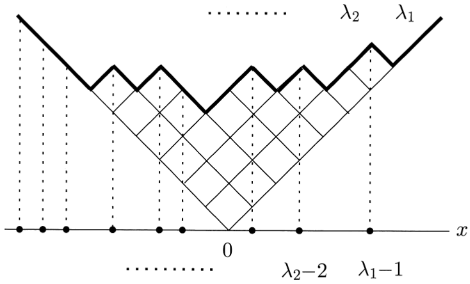


図 1　λ の shape とマヤ図形.

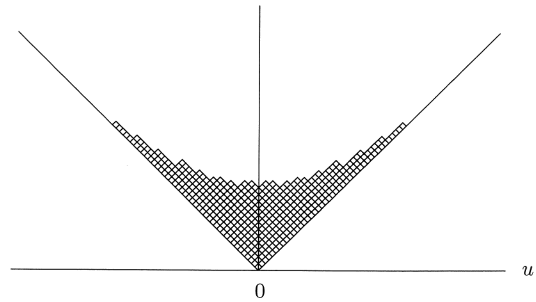


図 2　再スケールしたヤング図形.

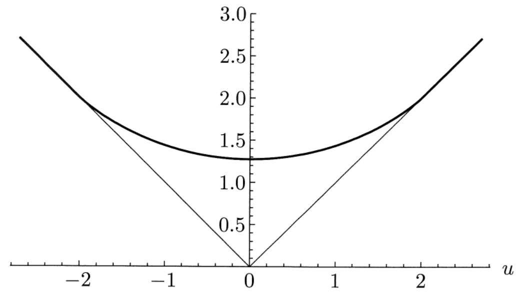


図 3　ヤング図形の limit shape.

共役なヤング図形を $\widetilde{\lambda}$ で表す．$\mathrm{Prob}_t(\lambda)=\mathrm{Prob}_t(\widetilde{\lambda})$ なので，$E_t\big[l(\lambda)\big]=E_t\big[l(\widetilde{\lambda})\big]$, $V_t\big[l(\lambda)\big]=V_t\big[l(\widetilde{\lambda})\big]$ である．t が大きい値のとき，$E_t\big[l(\lambda)\big]^2\approx E_t\big[|\lambda|\big]$, $V_t\big[l(\lambda)\big]\approx V_t\big[|\lambda|\big]/E_t\big[l(\lambda)\big]^2$ と見積れるので，このとき

$$E_t\big[\,l(\lambda)\,\big]\;=\;E_t\big[\,l(\widetilde{\lambda})\,\big]\;=\;O\big(t^{\frac{1}{2}}\big), \tag{7}$$

$$V_t\big[\,l(\lambda)\,\big]\;=\;V_t\big[\,l(\widetilde{\lambda})\,\big]\;=\;O(1). \tag{8}$$

ヤング図形の表面を右上隅から 1 行目, 2 行目と辿って得られる折れ線を**ヤング図形の形** (shape) と言う．図 1 はヤング図形を主対角線を軸に裏返し，左回りに 135 度，左上隅を中心に回転させたものである．図の太い折れ線がヤング図形の shape である．グラフが λ の shape となる区分線形関数を λ の **shape 関数**と言い，関数 $f_\lambda(x)$ で表す．ヤング図形を構成する単位正方形の箱を面積 t^{-1} の正方形の箱に再スケールしつつ t を大きくする（図 2）と，(6), (7), (8) から，ヤング図形のサイズや幅の平均は $O(1)$, 分散は $O(t^{-1})$ となる．Shape 関数の平均 $t^{-1/2}E_t\big[f_\lambda(t^{1/2}u)\big]$ は $O(1)$, 特に，極限 $t\to+\infty$ で関数 $f_\star(u)$ を定める．

$$f_\star(u)\;=\;\lim_{t\to+\infty}t^{-\frac{1}{2}}E_t\Big[f_\lambda\big(t^{\frac{1}{2}}u\big)\Big]. \tag{9}$$

この関数のグラフは n 次対称群のプランシュレル測度で確率分布するヤング図形の熱力学極限 $n=\infty$ の形（**limit shape**）を決める．$f_\star(u)$ の具体形は次のように知られている[1,2]（図 3）.

$$f_\star(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[u\arcsin\Big(\dfrac{u}{2}\Big)\;+\;\sqrt{4-u^2}\right] & |u|<2, \\ \quad |u| & |u|\geq 2. \end{cases} \tag{10}$$

以下の節では，予備知識をできるだけ仮定せずに (10) を導くことを目標にして，お話する．

3. 汎関数表示

図 1 のように，λ の表面の折れ線 (shape) に沿って，x 軸に順次垂線を下ろしていくことで，格子点 λ_i-i $(i=1,2,\ldots)$ が定まる．このようにして定まる整数の減少列 $\lambda_1-1>\lambda_2-2>\ldots$ を**マヤ図形**と言う．減少列の $l(\lambda)$ 番目より後は，1 ずつ単調に減る整数列 $-l(\lambda)-1, -l(\lambda)-2, \ldots$ である．この操作を逆に辿って，マヤ図形からヤング図形を決めることもできる．λ のマヤ図形の**密度関数**を次のように定める．

$$\rho_\lambda(x)\;=\;\sum_{i=1}^{+\infty}\delta(x-\lambda_i+i),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

密度関数と shape 関数は簡単な関係で結ばれている．**差分操作** $\varDelta$ を

$$\varDelta\rho_\lambda(x)\;=\;\rho_\lambda(x)\;-\;\rho_\lambda(x-1) \tag{12}$$

としよう．右辺は無限和の引き算であるから，その計算方法を与える必要がある．階段関数*1) による正則化

$$\lim_{N_0\to+\infty}\theta(x+N_0)\Big\{\rho_\lambda(x)-\rho_\lambda(x-1)\Big\}$$

を用いることにする．このようにして (12) の右辺を

*1)　階段関数 $\theta(x)\;=\;\begin{cases}0 & x\leq 0,\\ 1 & x>0.\end{cases}$

定めると，差分 $\Delta\rho_\lambda(x)$ は次の有限和に等しくなる．

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\Big\{\delta(x-\lambda_i+i)\;-\;\delta(x-\lambda_i+i-1)\Big\}$$
$$-\;\delta(x+l(\lambda)). \tag{13}$$

(13) と 2 回微分 $f''_\lambda(x) = d^2 f_\lambda(x)/dx^2$ を比べれば，両者が次の関係にあることがわかる*2)．

$$f''_\lambda(x) \;=\; -2\Delta\rho_\lambda(x). \tag{14}$$

確率測度 (4) を密度関数の汎関数と見なす．特に，任意のヤング図形について次式を満たす汎関数 $\mathcal{E}$ を**エネルギー汎関数**と呼ぶことにする．

$$\frac{t^{|\lambda|}}{\prod_{s\in\lambda}h(s)^2} \;=\; \exp\Big\{-\mathcal{E}[\rho_\lambda(\,\cdot\,)]\Big\}. \tag{15}$$

$\mathcal{E}$ は密度関数の 2 次形式になる．2 次形式を求めるのに次の公式は有用である．

公式*3)　$G(0)=0$ を満たす関数 $G(x)$ に対して

$$f(x) \;=\; G(x+1)-2G(x)+G(x-1) \tag{16}$$

とすれば，次の等式が任意の分割 λ について成り立つ．

$$\sum_{s\in\lambda} f\big(h(s)\big)$$
$$=\int_{x>y} dxdy\, G(x-y)\,\Delta\rho_\lambda(x)\,\Delta\rho_\lambda(y). \tag{17}$$

ただし，$h(s)$ は箱 $s\in\lambda$ の鉤長である．

2 次形式の実際を述べよう．d_λ の鉤長公式を用いると (15) を次のように表せる．

$$\mathcal{E}[\rho_\lambda(\,\cdot\,)] \;=\; 2\sum_{s\in\lambda}\log\frac{h(s)}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

公式 (17) に当て嵌めると，これは $f(x)=\log x/t^{1/2}$ の場合に相当する．このとき，公式の条件 (16) は G の 2 階差分方程式を定める．$G(0)=0$ となる差分方程式の解を $G(x)$ とすれば，$\mathcal{E}$ の明示式が得られる．

$$\mathcal{E}[\rho_\lambda(\,\cdot\,)]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy\, G(|x-y|)\,\Delta\rho_\lambda(x)\,\Delta\rho_\lambda(y). \tag{18}$$

*2)　図 1 を見ながら少し手を動かせば納得できるだろう．

*3)　(17) の右辺を計算すれば確かめられる．arXiv:0807.0746 付録 C に証明がある．http://arxiv.org/abs/0807.0746 から辿れる．

今の場合，$G(x)$ を次のように選べる．

$$G(x) \;=\; -\frac{x(x-1)}{2}\log t^{\frac{1}{2}} \;+\; \log\mathbb{G}(x+1). \tag{19}$$

右辺の $\mathbb{G}(x)$ は Barnes G-関数[3]である．多重ガンマ関数の一つで，i) 関数等式 $\mathbb{G}(x+1)\mathbb{G}^{-1}(x)=\Gamma(x)$ を満たし，ii) $x=1$ での値 $\mathbb{G}(1)=1$ である．(19) の差分は，G-関数の関数等式を用いて

$$\Delta G(x) \;=\; -(x-1)\log t^{\frac{1}{2}} + \log\Gamma(x),$$

2 階差分は，$\Gamma(x+1)\Gamma^{-1}(x)=x$ を用いて

$$\Delta G(x+1) \;=\; \log\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}$$

となる．さらに $G(0)=0$ であるから，(19) は公式の条件を満たす．よって確かに (18) が成り立っている．

4. 大偏差汎関数

パラメータ t が十分大きい正数であるとき，ヤング図形の面積 $|\lambda|=O(t)$，辺長 $l(\lambda), l(\widetilde{\lambda})=O(t^{1/2})$ である．$x=t^{1/2}u$ の再スケールによって，長さの尺度 δx を $\delta u=t^{-1/2}\delta x$ に縮小しよう．こうすればヤング図形の面積や辺長はすべて $O(1)$ になり，それらの揺らぎ（標準偏差）は $O(t^{-1/2})$ に押し込められる．このとき，マヤ図形の密度関数は

$$\rho_\lambda(t^{\frac{1}{2}}u) \;=\; \rho(u) \;+\; O\big(t^{-\frac{1}{2}}\big) \tag{20}$$

のように振る舞う．(20) の右辺の $\rho(u)$ は，区間 [0, 1] に値を持つ単調非増加な連続関数である．以下，$\rho(u)$ は区分的に微分可能であると仮定する．差分 (12) は

$$\Delta\rho_\lambda(t^{\frac{1}{2}}u) \;=\; t^{-\frac{1}{2}}\left\{\rho'(u)+O\big(t^{-\frac{1}{2}}\big)\right\} \tag{21}$$

のように振る舞う．$\rho'(u)=d\rho(u)/du$ が主要項である．

$\rho'(u)$ の台は有限区間と考えてよい．実際，(13) から $x\notin[-l(\lambda), l(\widetilde{\lambda})]$ に対して $\Delta\rho_\lambda(x)=0$ である．$\rho'(u)$ の台を連結開区間と仮定する．

$$\operatorname{supp}\big(\rho'\big) \;=\; (u_-, u_+), \quad |u_\pm|<+\infty. \tag{22}$$

再び (13) に注意すれば，次式が成り立つことも見易い．

$$\int_{-l(\lambda)-0}^{l(\widetilde{\lambda})+0} dx\,\Delta\rho_\lambda(x) \;=\; -1,$$

$$\int_{-l(\lambda)-0}^{l(\widetilde{\lambda})+0} dx\,x\,\Delta\rho_\lambda(x) \;=\; 0.$$

これらの式は ρ に対する境界条件を与える．

$$\rho(u) = \begin{cases} 1 & u < u_-, \\ 0 & u > u_+, \end{cases} \tag{23}$$

$$\int_{u_-}^{u_+} du\, u\, \rho'(u) = 0. \tag{24}$$

(23), (24) を満たす単調非増加かつ区分的微分可能な連続関数全体の集合を $\mathcal{D}$ とする．$\lambda \in \mathcal{Y}$ に関する分配和は，t が十分大きい正数であるとき，次のような $\rho \in \mathcal{D}$ に関する和として評価できる．

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}} \frac{t^{|\lambda|}}{\prod_{s\in\lambda} h(s)^2} = \sum_{\rho\in\mathcal{D}} \exp\left\{-t\Big(\mathcal{E}_0[\rho(\,\cdot\,)] + O\big(t^{-\frac{1}{2}}\big)\Big)\right\}. \tag{25}$$

右辺の汎関数 $\mathcal{E}_0$ は $\mathcal{E}$ の明示式 (18) の $t \to +\infty$ における主要項である．

$$\mathcal{E}_0[\rho(\,\cdot\,)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dudv\, g\big(|u-v|\big)\, \rho'(u)\, \rho'(v), \tag{26}$$

$$g(u) = \lim_{t\to+\infty} t^{-1} G\big(t^{\frac{1}{2}} u\big), \quad u \geq 0. \tag{27}$$

(27) の右辺の極限は G-関数の漸近展開[3]から具体的に計算できる．$g(u)$ は次のようになる[*4]．

$$g(u) = \frac{u^2}{4}\log u^2 - \frac{3}{4}u^2, \quad u \geq 0. \tag{28}$$

$\mathcal{E}_0$ は下に凸かつ有界な汎関数である．実際，$g(u) \geq g(e) = -e^2/4$ $(u \geq 0)$ なので，(23) により

$$\mathcal{E}_0[\rho(\,\cdot\,)] \geq -\frac{e^2}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} du\, \rho'(u)\right)^2 = -\frac{e^2}{4}.$$

また，$\mathcal{E}_0[\rho + \delta\rho] - \mathcal{E}_0[\rho] = \delta\mathcal{E}_0 + \delta^2\mathcal{E}_0$ とすれば

$$\delta^2\mathcal{E}_0 = -2\int_{-\infty}^{+\infty} dudv\, \log|u-v|\, \delta\rho(u)\, \delta\rho(v)$$

が得られる．右辺は $-2\log|u|$ を核関数とする 2 次形式であるから，恒等的に 0 でない任意の微小関数 $\delta\rho$ に対して $\delta^2\mathcal{E}_0 > 0$ が成り立つ．

*4) あるいは $\Delta G(t^{1/2}u)$ の $t \to +\infty$ における主要項を，ガンマ関数の Stirling 公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad x \to +\infty$$

から求めると，$g'(u) = u\log u - u$ $(u \geq 0)$ が得られる．$g(0) = 0$ に注意して，これを積分すれば (28) が得られる．

5. 熱力学極限と変分問題

汎関数 $\mathcal{E}_0$ を最小にする $\mathcal{D}$ の元を $\rho_\star$ とする．

$$\mathcal{E}_0[\rho_\star(\,\cdot\,)] = \min_{\rho\in\mathcal{D}} \mathcal{E}_0[\rho(\,\cdot\,)]. \tag{29}$$

前節終わりの注意から **minimizer** $\rho_\star$ は唯一存在し，そのエネルギーが分配和の熱力学極限を与える[*5]．

$$\mathcal{E}_0[\rho_\star(\,\cdot\,)] = -\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \log\left\{\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}} \frac{t^{|\lambda|}}{\prod_{s\in\lambda} h(s)^2}\right\}. \tag{30}$$

実際，(25) の右辺を

$$e^{-t\mathcal{E}_0[\rho_\star]} \sum_{\rho\in\mathcal{D}} e^{-t\left\{\left(\mathcal{E}_0[\rho]-\mathcal{E}_0[\rho_\star]\right)+O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}}$$

と書き換える．$\rho \neq \rho_\star$ について $\mathcal{E}_0[\rho] - \mathcal{E}_0[\rho_\star] > 0$ が成り立つ．よって，ρ $(\neq \rho_\star)$ の寄与は，$\rho_\star$ の寄与に比べて，$t \to +\infty$ で指数関数的に 0 である．これから (30) が導かれる．

(14) を再スケールすれば，ヤング図形の limit shape $f_\star$ と $\mathcal{E}_0$ の minimizer $\rho_\star$ の間の関係式 $f''_\star = -2\rho'_\star$ が得られる．u (> 0) が十分大きいとき，$f'_\star = 1$ ならびに $\rho_\star = 0$ なので，この関係式を次のように積分できる．

$$f'_\star(u) = 1 - 2\rho_\star(u). \tag{31}$$

$\rho_\star$ は $\mathcal{E}_0$ の変分問題の解である．(24) を付加条件とする**ラグランジュの未定乗数法**を用いることにする．すなわち，ν を未定乗数として

$$\mathcal{E}_0[\rho(u)] - \nu\int_{-\infty}^{+\infty} du\, u\, \rho'(u)$$

について $\rho(u), \nu$ による変分の停留条件を求める．$\rho(u)$ に関する停留方程式は次のようになる．

$$\frac{d}{du}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, g(|u-v|)\, \rho'(v)\right) = \frac{\nu}{2}, \quad \text{for } u \in (u_-,\, u_+). \tag{32}$$

もちろん，ν による変分の停留方程式は (24) である．

$\rho_\star$ を求めるのに，(32) を直接扱うことはせず，その u 微分を用いる（(32) 自体は ν の決定に使われる）．(32) の左辺の u 微分は次のようになる．

*5) (25) の左辺は e^{-t} なので (30) の右辺は -1.

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, g(|u-v|)\,\rho'(v)\right)$$
$$= \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, g''(|u-v|)\,\rho'(v) \;+\; 2g'(0)\rho'(0)$$
$$= \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \log|u-v|\,\rho'(v).$$

右辺の “PP” はコーシー主値をとることを示す．また，最後の等式は $g'(u) = u\log u - u$, $g''(u) = \log u$ であることによる．よって，(32) を u について微分すると次の方程式が得られる．

$$\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \log|u-v|\,\rho'(v) \;=\; 0, \quad \text{for } u \in (u_-,\, u_+). \tag{33}$$

$\rho_\star$ の変分問題を次のように纏めよう．

> $\rho_\star$ は方程式系 (23), (24), (33) の解である．逆に，単調非増加かつ区分的微分可能な連続関数 ρ が (23), (24), (33) を満たすならば $\rho = \rho_\star$ である．

6. 変分問題と Riemann–Hilbert 問題

区分的に微分可能な $\mathbb{R}$ 上の連続関数 ρ に対して次のような積分変換を考える．

$$W(z) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \log(z-v)\,\rho'(v), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

ただし，$\log z$ のカットは負の実軸に沿って入れる．こうして得られる $W(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の解析関数である．上半平面または下半平面から実軸に近づくとき，次の公式が成り立つ[*6]．

$$W(u\pm i0) \;=\; \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \log|u-v|\,\rho'(v) \mp i\pi\big(\rho(u) - \rho(+\infty)\big). \tag{35}$$

この公式に注意すると，前節の変分問題を次のような境界条件を満たす解析関数を求める問題（$\mathbb{C}$ 上の Riemann–Hilbert 問題）に定式化できる．

*6) (35) はコーシー積分の公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \frac{\rho(v)}{u \pm i0 - v} \;=\; \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \frac{\rho(v)}{u-v} \mp i\pi\rho(u)$$

に帰着する．

> $$W(u+i0) + W(u-i0) \;=\; 0, \quad \text{for } u \in (u_-,\, u_+), \tag{36}$$
>
> $$W(u+i0) - W(u-i0) = \begin{cases} 0 & u \geq u_+, \\ -2\pi i & u \leq u_-, \end{cases} \tag{37}$$
>
> $$W(z) \;=\; -\log z + O(z^{-2}), \quad \text{as } z \to \infty. \tag{38}$$

実際，(35) を用いると

$$W(u+i0) \;+\; W(u-i0)$$
$$=\; 2\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \log|u-v|\,\rho'(v)$$

なので，(33) から (36) が得られる．同様にして

$$W(u+i0) \;-\; W(u-i0)$$
$$=\; -2\pi i\big(\rho(u) - \rho(+\infty)\big)$$

なので，(23) から (37) が得られる．さらに，(34) の右辺を $z=\infty$ で展開すれば，(23), (24) から (38) が確かめられる．

$$W(z)$$
$$= \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} dv\rho'(v)\right\}\log z - \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} dvv\rho'(v)\right\}z^{-1} + O\big(z^{-2}\big)$$
$$=\; -\log z \;+\; O\big(z^{-2}\big).$$

Riemann–Hilbert 問題を解くことで minimizer が得られる．実際，$W(z)$ を Riemann–Hilbert 問題の解とすれば，(35) から次式が成り立つ．

$$\rho_\star(u) \;=\; \mp\frac{1}{\pi}\Im W(u\pm i0). \tag{39}$$

7. Riemann–Hilbert 問題の解とヤング図形の limit shape

$y(z) = e^{-W(z)}$ とする．(36), (37), (38) から $y(z)$ は次の境界条件を満たす．

$$y(u+i0)\,y(u-i0) \;=\; 1, \quad \text{for } u \in (u_-,\, u_+). \tag{40}$$

$$y(u+i0) = y(u-i0), \qquad \text{for } u \in \mathbb{R}\backslash(u_-, u_+), \tag{41}$$

$$y(z) = z + O\big(z^{-1}\big), \quad \text{as } z \to \infty. \tag{42}$$

(40), (41) から次式が成り立っている．

$$\Big(y(u+i0)\,y(u-i0) - 1\Big) \times \Big(y(u+i0) - y(u-i0)\Big) = 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

この式をさらに整理すると，次の形にまとめられる．

$$y(u+i0) + y(u+i0)^{-1} = y(u-i0) + y(u-i0)^{-1}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

(35) によれば，$y(z) = e^{-W(z)}$ は実区間 (u_-, u_+) に沿って多価な $\mathbb{C}$ 上の解析関数である．$y(z)+y(z)^{-1}$ の組合せを考えれば，(43) はこれが 1 価であることを述べている．つまり，$y(z)+y(z)^{-1}$ は有理関数である．以下，$y(z)+y(z)^{-1}$ は正則関数であるとして，これを残りの条件から決める．実際，(42) から

$$y(z) + y(z)^{-1} = z + O\big(z^{-1}\big), \quad z \to \infty$$

となるが，左辺が正則関数であるためには右辺の z の負冪が消える必要がある．すなわち，次式が成り立つ．

$$y(z) + y(z)^{-1} = z. \tag{44}$$

(44) は $y(z)$ が有理曲線 $y + y^{-1} = z$ の分岐であることを示している．この曲線は $\mathbb{CP}_1$ の 2 重被覆である．実際，単位円板 $|y| \le 1$ とその外側 $|y| \ge 1$ が各々，z 平面を被覆し，y は実区間 $(-2, 2)$ に沿うカットを持つ：$u_\pm = \pm 2$．(42) から $y(z)$ は $|y| \ge 1$ の被覆である．$y(z)$ は $\mathbb{R}\setminus(-2, 2)$ 上実数値であり，特に

$$y(u) \ge 1 \ (u \ge 2), \quad y(u) \le -1 \ (u \le -2)$$

となる．他方，上半平面または下半平面からカットに近づくとき，$u = 2\sin\theta \ (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とすれば

$$y(u \pm i0) = e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \tag{45}$$

である．こうして得られた $y(z)$ が (40), (41) を満たすことは見易い．

ヤング図形の limit shape が (10) で与えられることを確かめよう．最初に，(45) と直前の式を用いて，$W(u \pm i0) = -\log y(u \pm i0)$ は次のようになる．

$$W(u \pm i0) = \begin{cases} -\log y(u) & u \ge 2, \\ \mp i\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{u}{2}\right)\right) & |u| < 2, \\ \mp i\pi - \log|y(u)| & u \le -2. \end{cases} \tag{46}$$

ただし，逆正弦関数は主値をとる．(46) を (39) の右辺に代入すれば $\rho_\star$ が次のように得られる．

$$\rho_\star(u) = \begin{cases} 0 & u \ge 2, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{u}{2}\right) & |u| < 2, \\ 1 & u \le -2. \end{cases} \tag{47}$$

さらに，(47) を (31) の右辺に代入し，次のように $f'_\star$ が定まる．

$$f'_\star(u) = \begin{cases} 1 & u \ge 2, \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{u}{2}\right) & |u| < 2, \\ -1 & u \le -2. \end{cases} \tag{48}$$

最後に，(48) を積分して，$f_\star(u) = |u| \ (u \to \pm\infty)$ となるように積分定数を決めれば，(10) が得られる．

8. 終わりに

以上で，ヤング図形の limit shape を記述する式 (10) の導出は完了である．熱力学極限（漸近解析）を求めるにあたり，特殊な題材であるにせよ，様々な数学概念が顔を出した．楽しんで読んでいただけたなら幸いである．オシマイ．なお，Riemann–Hilbert 問題の定式化（6 節）とその解法（7 節）について高崎金久氏にご教示いただいた．感謝します．

参考文献

1) B.F. Logan and L.A. Shepp, "A variational problem for random Young tableaux", *Adv. Math.* **26** (1977), 206–222.
2) A. Vershik and S. Kerov, "Asymptotics of Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux", *Soviet Math. Dokl.* **18** (1977), 527–531.
3) E.T. Whittaker and G.N. Watson, "A course of modern analysis", Chapter XII, example 48., Fourth edition, Cambridge university press (1927). ibid., Chapter XIII, example 3.

（なかつ・としお，摂南大学理工学部）

John von Neumann から Alain Connes へ
冨田・竹崎理論を経て

竹崎　正道

この文は我田引水なので要注意です！

『神は数学の言葉で天地を創造したもうた！』

と Galileo Galilei が語って以来，数学と物理学は手に手を携えて発展して 20 世紀をむかえました．その途上で René Descarte に依る人権の発見もありました．

20 世紀に入ると数学・物理学の中心地ヨーロッパ，米国及び極東では民族主義的且つ帝国主義的国家群が戦争を繰り返しながら学問・教育を国家政策の中に取り入れ始めます．その結果自然科学が爆発的な発展を遂げ，20 世紀は科学が支配した世紀となりました．そして，遂に

$$E = mc^2,$$

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}$$

に依って象徴される人類科学史上最大の発見と言っても過言ではない相対論と量子力学の誕生を迎えます．前者は 20 世紀幕開け当初の 1905 年に Albert Einstein に依り提唱されたエネルギーと質量の同値性であり，後者は 1925 年に Werner Karl Heisenberg に依り提示された正準交換関係です．20 世紀の理論物理学・数理物理学はこの両方程式を統一的に取り扱う理論の構築に明け暮れる事になりましたが，未完の理論から性急に導かれた応用は残念な事に人類に史上最大の災禍をもたらしました．広島・長崎・Three Mile Island・チェルノヴィリ・福島です．

この大発見は数学にも深刻な影響を及ぼしました．相対論は其れ迄のテンソルの計算に明け暮れた微分幾何を Shiing-Shen Chern をリーダーに大域的微分幾何へと変身させ，Atiyah–Singer Index Theorem に象徴される大きな成果を挙げました．

一方量子力学は其れ迄の数学と全く別質な数学を求めるものでした．波動性と粒子性を同時に許容する現象を記述する数学が求められました．正準交換関係は無限次元で非可換な数学を要請しました．勿論，その様な数学が要請されていると言う認識が数学界全体に共有されて居た訳ではありません．上記の P とか Q と言う量が何物なのかも当初は理解されていませんでしたし，自己共役作用素と対称作用素の区別も曖昧でした．John von Neumann はこの曖昧模糊とした状況の中で先ず Hilbert 空間の概念を公理系に依り定式化して，自己共役作用素と対称作用素の関係を明確にします．続いて非有界自己共役作用素のスペクトル分解を与えて，量子力学の観測可能量に対する数学的枠組みを与えます．更に観測の理論を表して，観測が物理量に与える影響に就いての理論も構築しました．そして，量子力学に必要な数学は無限次元で非可換な数学であるとの認識の上に，共同研究者の Francis Joseph Murray と共に作用素環論を創始します．幸いに，其れに先立って David Hilbert に依り提唱された公理主義と Emmy Nöther に依る抽象代数学が土台を提供して呉れました．1930 年代から 1940 年代始めに掛けての事です．von Neumann は作用素環の基本定理・第二可換子環定理を 1929 年に証明した当初は凡ての因子環は I 型であると，つまり Wedderburn 型の定理が成り立つと思い込んでしまっていましたが，Murray の協力を得て，因子環が I 型，II 型，III 型と分類される事を突き止めました．非ユークリッド幾何とユークリッド幾何を同時に内包する射影幾何の成功から影響を強く受けた von Neumann は因子環解析の土台を射影作用素束に置き，その結果 III 型因子環を，無限テンソル積で現れる因子環は殆どが III 型であるにも拘らず，病理現象と看做してしまいました．彼の射影幾何への傾斜は我が国でも盛んに研究された連続幾何学となりました．然し，この試みは彼を袋小路に誘い込

みました．von Neumann 環を公理主義的に定式化しようとした試みは後に境正一郎による共役空間としての特徴付けとなって結実しました．境の成功と J. von Neumann の不成功は代数化を超えるコンパクト性の超限性の魔力を感じさせます．

III 型 von Neumann 環を病理現象から解放したのが，von Neumann と Murray の最後の仕事 1943 年から約 30 年後の 1970 年代に確立された冨田・竹崎理論でした．それより数年前に，我が国の荒木不二洋に依り理論物理に登場する大部分の von Neumann 環は III 型である事が示されていましたから，冨田・竹崎理論は作用素環専門家と数理物理学者に歓迎されました．其処に登場したのが，新鋭 Alain Connes でした．彼は冨田・竹崎理論を更に深化させます．そして，冨田・竹崎理論はついに III 型 von Neumann 環が II_∞ 型 von Neumann 環の一径数自己同型群に依る接合積として一意に表される事を突き止めます．此れで von Neumann 環の一般論の土台は一応基礎固めが済みました．

然し，作用素環論はその生い立ちから，基礎論とも深く関わっていて，作用素環論の問題はしばしば基礎論の問題を引き起こします．量概念が実は論理学とも密接な関係を持っている事の証です．実際に作用素環論の問題が基礎論へ影響を与える場面もありました．例えば，最近盛んな同値関係に関する基礎論の分野は作用素環論からの影響で発生しました．同値関係は数学科の講義に早い段階で登場しますが，後は余り議論されません．ところが，作用素環論では，同値関係がどの様な構造をして居るのかが大きな問題になります．その事が基礎論の専門家達を刺戟したのです．

作用素環論は数学史上どんな位置を占めるのでしょうか？ 数学が数に関する学問として出発した事に異論を挟む余地はありません．『数とは何？』の疑問は中々厄介な問です．量に関する概念と大雑把な言い方をしておきましょう．数える行為は自然数へと導きます．次いで，零が仲間入りして*1)，更に負の数が仲間入りして整数が認識され，四則演算は有理数へと人々を自然に導きました．この後，無理数と複素数の参入には時間と幾多の論戦が必要でした．その『完成』には 19 世紀から 20 世紀までの時間が必要でした．George Cantor の集合論を巡る苦闘は記憶に止めて置きたいものです．19 世紀数学の大事な成果の一つは熱伝導の研究を契機に Joseph Fourier に依り創設された Fourier 解析でした．此処から一気に解析学が深さと広がりを見せ始めました．そして，数学の革命—集合論と公理主義と厳密な数学・解析学の誕生—へと向かったのです．作用素環論はこの流れに更に加えて無限次元と非可換解析を統合した解析学を担ったのです．人の五感は可換的ですが，此処で構築を求められる数学は五感を遥かに超えたものです．従って，厳密さを犠牲にした直観主義的手法の入り込む余地はありません．

さて，量概念の学問としての解析学の無限次元化と非可換化の基礎が出来たと述べましたが，次に空間概念，つまり幾何学的概念の無限次元化と非可換化を数理物理学は要請しています．これに答えようと言うのが，Connes が提唱する非可換幾何学です．これは未だ未完で，現在進行形で研究が進められています．これまでにも無限次元化の試みは Connes 以外にもありましたが，量概念の非可換化と無限次元化を土台にしてない試みなので，残念ながら現在の数理物理学の要請に応える形にはなっていません．筆者が Connes の非可換幾何に懸ける夢がもう一つあります．それは，Isaac Newton 以来幾多の哲学者，数学者が説明しようとして未だに満足の行く答えが出ていない問題，無限大と無限小に就いて，彼独特の説明があるからです．無限次元 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の全有界作用素の環 $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は離散と連続を同居させています．又，無限次元を強調すれば有限次元は無視されます．すると，コンパクト作用素が無限小量を表す事になります．無限小とは如何なる正数 $\varepsilon > 0$ より小さな量です．コンパクト作用素 $a \in \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ はどんな正数 $\varepsilon > 0$ に対しても，有限次元射影子 p を $\|(1-p)a\| < \varepsilon, \|a(1-p)\| < \varepsilon$ となるように許容します．つまり無限小です．今，作用素 $a, b \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ が与えられた時 $[a, b] \in \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ ならば量 a はもう一つの量 b に関して微分可能量と看做す事が出来ると言う訳です．

1980 年代から 21 世紀に掛けて提唱されている Connes の非可換幾何学に筆者は期待を寄せています．著者自身は幾何学の素養が乏しく参戦出来ないのが残念ですが，若い読者諸氏の活躍を期待しています．

（たけさき・まさみち，カリフォルニア大学名誉教授）

*1) 今日では当たり前の零の数としての参入はヨーロッパでは歴史的に比較的新しい事で 12 世紀です．又，日本と米国では建物の階数には零階がありません．

von Neumann, Connes そして Jones

河東　泰之

1. はじめに

竹崎氏に続き，私も作用素環論の立場から物理学との関連について書いてみたい．作用素環論がその成立の当初から理論物理学と密接な関係を保っていたことは明らかである．このうち，von Neumann と Connes の貢献については竹崎氏による原稿に譲ることにして，私は Jones について書くことにしよう．

ただ最初に，Murray と von Neumann がごく初期の短い間に，独走状態で現在まで続く大きな枠組みやアイディア，テクニックを生み出したこと，Connes はさらに短い 20 代の数年間に，ありとあらゆる奇跡的な業績をあげて作用素環論を一新させたことを強調しておきたい．本当に大きな方向転換というのはごく短い期間で起きるものなのかもしれない．

2. Jones と物理学への期待

Jones はニュージーランドで学部を卒業し，スイス・ジュネーブに大学院生として留学した．当初は理論物理学を学ぼうとしていたのだが，つく予定になっていた先生が，彼のジュネーブ到着直後に急死してしまったのである．そのため理論物理学から数学に転向し，トポロジーで有名な Haefliger の指導を受けることになった．しかしニュージーランド時代から作用素環論の基本的なことは知っており，興味は持ち続けていたとのことである．その後，院生時代に上記の Connes の革命的業績を知り，自分もその方面で研究を進めることを決意した．実際，Jones の初期の研究は Connes の理論を一般化するものが中心であった．この間，数理物理学との関係は薄れてしまったように見えたが，のちに長い時間と経路をたどって再び数理物理学との密接な関連が現れてくるのである．

3. 部分因子環と Jones 指数, Jones 多項式

ガロア理論は体とその拡大体との関係を扱う．作用素環とその拡大環でも同じようなことを考えることはできるのだが，形式的な類似を超えた本質的に新しい現象が現れる．その最初の例が，拡大次数に当たる数（Jones 指数と呼ばれる）がもはや整数とは限らなくなることである．単純環に当たる基本的な作用素環は von Neumann の命名で因子環と呼ばれており，拡大環より部分環を考えたほうが取扱いが簡単なので，この理論は部分因子環論と呼ばれる．Jones はこの理論のすべての基礎的なアイディアを，1980 年代前半の彼が 30 歳前後だったごく短い期間に一人で考え出した．さらにそれが，Jones 多項式の発見を通じて結び目

の研究に役立つという衝撃的な応用があり，1990年のフィールズ賞に結びついたわけである．

4. 代数的場の量子論

一方，数理物理学では場の量子論が大きなテーマであり続けている．物理学の理論としては大きな成功を収め，現在も大きく発展中であるが，数学的な立場からも重要な問題の宝庫である．数学的に厳密な取扱いは大変難しく，様々なアプローチが提唱され，研究されているが，その中で，作用素環論に基づくものが代数的場の量子論と呼ばれており，過去50年ほどにわたって研究されてきている．『量子力学の数学的基礎』を書いたvon Neumannがその数学的研究をするために導入した枠組みを，素直に場の量子論の研究に適用しようとしたものと言えるだろう．

これはJones以前から様々な研究が発展していたのだが，Jonesの見出した部分因子環の理論，特にJones指数の概念が大変有効であることが1980年代後半に明らかになった．

その後，Wassermannと共同で考えた枠組みも，Jonesによれば代数的場の量子論のことは全く考えずに始めたということであったが，代数的場の量子論，特に共形場理論において重要な例の構成法であることがはっきりしてきた．これは現在もさかんに研究されている重要なテーマである．

このように，Jonesの若い頃の理論物理学への興味は長い回り道を経て，現実のものとなったのである．

5. 頂点作用素代数

上述の共形場理論の数学的研究では，頂点作用素代数と呼ばれる純代数的公理系もあり，先行して研究されてきた．特に位数最大の散在型有限単純群モンスターと，それに関連したミステリアスな予想，ムーンシャイン予想（Borcherdsが解決してフィールズ賞を受賞した）から生じる一例が大変有名かつ重要なものである．これについても現在は作用素環論の手法で研究できることがわかっている．作用素環論の枠組みで一般論，特に表現論的な手法を展開しようとした場合，Jones指数の理論は必須の道具であり，これに当たる概念を自然な形で一般的に定義することができないことが，頂点作用素代数の理論で問題になっている．

頂点作用素代数の代数的な手法が有効な局面もたくさんあり，作用素環的アプローチと，頂点作用素代数によるアプローチとの関係はLie群とLie環の関係のようなものであるはずで，きれいな対応関係が確立されるべきなのだが，なかなか難しい問題が山積しており，完全解明への道のりはまだまだ遠い．

6. その人となり

Jonesは豪快な性格でいつもラフなかっこうをしている．京都でのフィールズ賞授賞式の際も式の後にすぐネクタイを外してしまった．フィールズ賞の金メダルをパーティーで投げて遊んでいたのも覚えている．ウィンドサーフィンが趣味で，ホームページにもその様子の写真がポストされている．もう60歳に近づいているが，一般の人が想像する「偉い大学者」とは全く違った印象の人である．私が初めて彼に会ったとき，彼は30代前半だったのだが，今も受ける感じは全く変わらない．これほどものごとにとらわれず，自分独自の考えを貫く人だから，このような革命的な業績が挙げられたのかもしれない．

最近カリフォルニア大学バークレー校から，ヴァンダービルト大学に破格の条件で移動したが，そのためさらに自由に行動できるようになったようである．これからもさらに自由な発想で研究を続けていくことだろう．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

演習形式で学ぶ 相転移・臨界現象

宮下精二・轟木義一共著，B5 判，232 頁，本体 2476 円，サイエンス社



相転移と臨界現象は相互作用をする粒子やスピンの集団が示す神秘的な現象で，多くの研究者の心を引きつけて来た．私の専門は磁性体の実験で，相転移と臨界現象は大切な研究対象であるが，本書は理論書であり，その理論的数学的基礎は私には難しすぎるところが多くあるので，最初は書評をお断りしようと思ったが，実験家が書いた理論書の書評も別な面で何かの役に立つかもしれないと思い，お引き受けすることにした．

本書は例題とその解答を通して相転移と臨界現象の基礎を広く修得してもらう主旨で書かれたもので，理論系の大学院生が主な対象と考えられる．扱われている内容はスピン系の問題が多い．これは二人の著者が共にスピン系の統計理論を専門としていることもあるだろうが，スピン系が相転移と臨界現象の重要な題材を多く提供しているためでもある．

内容は，まず第 1 章「熱力学における相転移」で熱力学の復習から始まり，第 2 章「統計力学における相転移」で相転移の微視的および現象論的アプローチの方法がまとめられている．この第 2 章では，Ising 模型を基に分子場近似，Bethe 近似，高温および低温展開，あるいは Landau の現象論や双対性などに関する例題と解説がある．第 3 章「臨界現象におけるスケーリングおよび繰り込み群の方法」では，臨界指数とスケーリング，および臨界現象の有力な解析手法である繰り込み群の方法が詳しく解説されている．この章では種々の臨界指数とそれらの間の関係式が見易くまとめられている他，繰り込み群の説明も各段階ごとに例題が設定され，これらを順に追って行くと結論に到達できるようになっている．この第 3 章までが基礎知識に関するもので，第 4 章以降が個別の重要な問題に対する解説に充てられている．第 4 章「いろいろな模型」では，Ising 模型と共によく知られた XY 模型と Heisenberg 模型，およびそれらを一般化した $O(n)$ 模型，あるいは Potts 模型やクロック模型などの相転移と臨界現象が解説されている．第 5 章「フラストレーションのある模型」では，三角格子反強磁性体の相転移とカイラル相転移が詳しく扱われている．その他に ANNNI 模型やかごめ格子反強磁性体に関する例題もある．第 6 章「Kosterlitz-Thouless 転移」では，2 次元 XY 模型などの $O(2)$ 対称性をもつ 2 次元系に特徴的な渦が関係する Kosterlitz-Thouless 転移が扱われていて，長距離秩序の有無を論ずる Mermin-Wagner-Hohenberg の定理，2 次元 XY 模型の相関関数，渦欠陥，Kosterlitz-Thouless 転移の解析が詳しく解説されている．この第 6 章までは主として温度変化による相転移が扱われているが，第 7 章「量子臨界現象」ではハミルトニアンのパラメーターの変化によって引き起こされる異なる量子状態間の相転移と臨界現象が横磁場 Ising 模型を例に詳しく解説されている．この他に Bose-Einstein 凝縮と Bose-Hubbard 模型の解説もなされている．続いて第 8 章「ランダム効果」では，スピングラスについての詳しい解説が，第 9 章「可解模型」では，2 次元 Ising 模型に代表される厳密に解ける模型の詳しい解説が例題を用いて行われている．近年，場の理論からのアプローチが物性物理に新しい切り口を与えているが，それに関連して第 10 章で「共形場理論」の説明が行われている．ただ，この章は私には難しすぎる．最後の第 11 章「相転移の動的側面と非平衡相転移」では，緩和現象のような系の動的性質を議論する van Hove の現象論，マスター方程式，モンテカルロ法の解説と非平衡相転移の簡単な説明がなされている．

相転移と臨界現象を扱ったテキストは私も幾つか知っているが，基本的で重要な手法や概念，関係式，あるいは現代の最先端の研究につながるテーマを例題形式でコンパクトに解説したものはこれまでほとんどなく，本書が初めてかもしれない．本書を読んでみて，解説は全体的に丁寧で，分かり易いという印象をもった．これは両著者が優れた研究者であるだけではなく，良い教育者である証であろう．臨界指数などの重要な数値や関係式が見易くまとめられている他，ポイントとなる項目や式の導出が例題としてまとめられているので，長々と本文を読まなくても視覚的に目に入ってくる．従って，時間のない忙しい人には便利である．また，目を下に移せば脚注に文献があげられており，原論文を知る上で便利である．本書は理論系の大学院生のみならず実験家にも重宝するのではなかろうか．

田中　秀数（東京工業大学大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

一松 信

1982年5月号

30年前を振り返ると，劇的に変化した部分と意外に変化の少ない部分があります．「マイコン時代の計算機と数学」というテーマの場合それを強く感じます．

その特集で私は下記の5方面を挙げました．

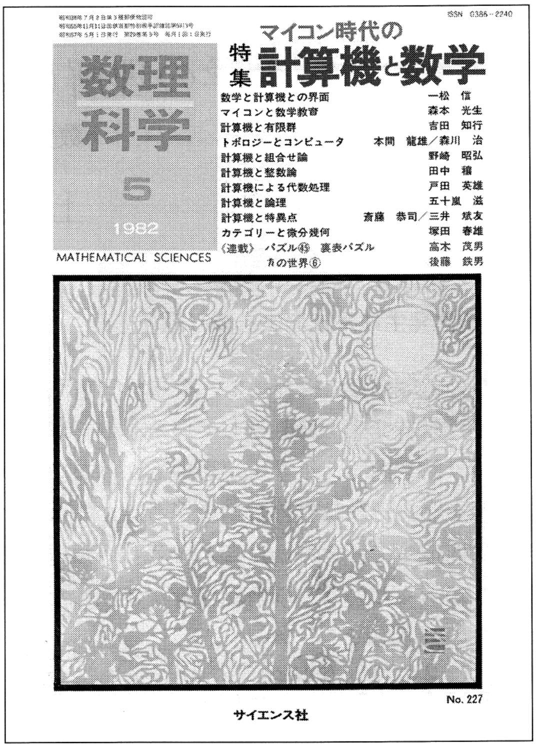
I. 計算機科学への数学理論の応用．
II. 計算機科学から派生した数学の新分野．
III. オフィスオートメーションの道具．
IV. 数学自体の研究へ計算機を利用する．
V. 数学教育への活用．

このうちIIIはいまさらいうまでもない当然の話題になりました．IVも大発展がありました．それにひきかえVは（特に日本において）思った程普及していないと感じるのは私のひがみでしょうか．

同特集に収録された記事の多くはIVに属する先駆的な研究の紹介です．今から見れば「幼稚」な部分もありますが，当時としてはむしろ意外に進んだ研究が行われていたようです．

コンピュータによる数学の新結果の証明ないしはcomputer assisted proofはその後も大きな進展がありました．一例を挙げれば3次元の球の最密充填に関するケプラー予想の解決です．他の例として精度保証つき計算を援用して，ある種の非線型偏微分方程式の解の存在証明に成功した成果があります．

2011年2月（そして10月末）に海王星が発見以来，軌道を一周して発見された位置に戻ってきたというので記念行事が行われました．アダムズとルヴェリエによる軌道予測計算は天体力学の勝利として科学史上特筆すべき大成果です．しかしこの逆問題は現在のコンピュータでの計算によれば案外容易に，もっと精密に導かれたのではないかと想像しています．黄道面上の円軌道で天王星とほぼ同質量，1821年に天王星と合になったと仮定（結果的には大変よい近似）すれば，太陽からの距離だけが唯一の未知数となります．いくつかの仮の値から計算して最適の値を定めるのは，さほど困難ではないように考えられます．



もちろんこれは先人の成果を過小評価するものではありません．高速計算機があったらという後世の人間の思考実験にすぎません．

前述の諸方面で大きく欠けていた視点は，コンピュータグラフィックスの活用でした．前述VとともにI，IIの方面にも多くの成果がありますので，新たな特集の企画にもなるでしょう．

特集で私が述べた「問題点」のうち，不器用な老人にも使い易い機器などは，携帯電話を日常使い慣れている今の若い方々から見れば，笑い話的な見当違いだったかもしれないと反省しております．

（ひとつまつ・しん，京都大学名誉教授）

リレー連載

数学的な感覚の探求 第4回

思考法の源を探る

数学の理解はどこから生じるか

数覚は存在するか

上野　健爾

1. 個体発生は系統発生を繰り返す

数学の初等教育に携わっている方から時折,「個体発生は系統発生を繰り返している」のではないかという話を聞く．小学生が思いもかけないような発想をし，それは昔の数学者が考えたこと，ときには間違って考えていたことと著しい類似があるときがあるという．以前私自身が体験した例では分数の割り算で

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1 \times 6 \div 2}{2 \times 6 \div 3} = \frac{3}{4}$$

と計算した小学生がいた．分母，分子に掛けた6は二番目の分数の分母と分子の最小公倍数であるという．分数が比であり，割り算の結果であることに気付いたわけではないと思われるが，分数の掛け算が

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

となることから類推したと思われる．実際

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1 \div 2}{2 \div 3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{6 \times \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

と計算しても正しいのであるが，小学校ではこうした分数計算は取り扱わないので，整数の範囲での計算として，最小公倍数を先に介在させたことは見事な着想である．

日本の学校数学では比と比の値とを峻別するが，ギリシア以来，比と比の値と分数とは同じものと見なされており，分数の計算に比の計算を使うことのほうが近世ヨーロッパでは普通であった．上の小学生の場合は，まさにそのことが無意識のうちに現れたといってよかろう．

この例が示すように，私たちは実は思いもかけないほど柔軟な発想をすることが可能である．問題なのは，それが優れた発想であるかどうかは自分では判断できないことである．上記の例では，小学校のクラスで上の解法が提案されたときに，担任の先生はそれが正しいかどうかすぐには判断ができず，クラスの皆といくつかの例を計算して，計算法が正しいことを確認したという．その後，通常の計算法

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

と比較して時間がかかりすぎるということで授業は終わったという．小学校では文字を使わないのでできないが，上の小学生の例は文字式を使えば

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times cd \div c}{b \times cd \div b} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

と通常の計算と最終的には同じになることが分かる．

ところで，担任の先生は時間がかかりすぎるという結論に自分で納得がいかず，いろいろな方に質問され，巡りめぐって私にまで質問が届いたので，こ

の計算法が正しいこと，それ以上にこの小学生の素晴らしい発想法を大事にしてほしいと答えた．この私のコメントが小学生に届き，それまで算数が大嫌いだったこの小学生は算数が大好きになったという話が再び私の所に届いた．このように，私たちの脳は隠れた大きな力を持っている．それをどのように働かせたらよいのかは簡単には分からないが．

個体発生は系統発生を繰り返す例としてピアジュによる子供のユークリッド空間の受容に関する研究をあげることができるように思われる．ピアジュによれば幾何学は（ユークリッド）計量的→射影的→位相的の順序で歴史的に発達してきたが幼児の図形・空間認識はこの逆の順序で発達するという[2)]．もっともこの説明は数学の歴史を極端に単純化した見方で，不正確であるが，ユークリッド幾何学から射影幾何学と非ユークリッド幾何学が生まれ，リーマン幾何学へと進展し，さらにトポロジーが誕生したことは歴史的事実である．ピアジュの解釈は吟味し直す必要があるかもしれないが，ピアジュの解釈が正しいとすれば，幼児は最初にトポロジー的に図形を認識するというのは人類の祖先が水中生活をしていたことと深く関係があるように思われる．もちろん，幼児は直線をきちんと引くことはできないので，逆にトポロジー的に図形を見るように脳にプログラムが作られている可能性も考える必要はあるが．しかし，人類が今でも水中生活を続けていたとすれば今日の数学とは異なる形で幾何学が発展してきたことは間違いない．ものの形状が連続的に変化し得る水中では，ユークリッド幾何学よりはトポロジーのほうが先に発展する可能性が大である．ユークリッド幾何学が見出されるのはかなり後になってからであろう．そのように考えられるのはこの地球上のユークリッド幾何学が極めて高い精度で成り立つ空間で歴史を歩んできた人類は，ユークリッド幾何学で終わることなく，非ユークリッド幾何学を見出し，さらにはリーマン幾何学，トポロジーとその考察の範囲を拡げていったからである．さらに，3次元の框（かまち）を越えて高次元の幾何学も展開することができるようになった．水中生活をしているイルカや鯨がどのようにものの形を認識しているか分かると大変面白いが，現在の所まとまった研究はされていないようである．

いずれにしても人類を取り巻く物理環境が数学の発展と深く関わっていることも想像に難くない．蟻の研究家によると，巣穴からでて獲物を獲得した蟻は，獲物を持って一直線に巣穴へと戻るという．獲物にとりついた蟻を獲物ごと近くの場所に人手で移すと，蟻は獲物を巣穴へ持ち帰ろうとして，獲物が本来在った場所と本来の巣穴とを結ぶ直線に平行に獲物を運んでいくそうである．このことは，人間だけでなく，他の生物も周りの空間の有り様に大きく依存して進化して来たことを窺わせる．このような観点から見ると，カントが空間の直観の基礎にユークリッド幾何学を採用したことは間違っていたわけではなさそうである．ただ，人間の知性は平坦から外れた幾何学も理解できるように数学の発展を促したといえよう．平坦から大きく外れた空間で人類が誕生したとすれば最初に作り出す幾何学はユークリッド幾何学ではないであろう．それにも関わらず，いずれかの時点で平坦な空間の幾何学としてユークリッド幾何学が誕生することは間違いない．

このような考えをさらに推し進めれば，高度な文明をもった生命体が存在したとすれば，そこで数学が存在するかという問題に行き当たる．これは現在では全く想像の域をでないが，蟻や蜂のような本能に基づく集団生活ではなく，何らかの意志に基づく社会生活が必要とされるのであれば数学の誕生は必然性があるように思われる．

実は1から3までの数であれば地球上の多くの動物が認識でき，このような数を認識できるための神経回路が脳に作られているそうである（文献4），この本の表題に含まれる「数覚」はこの小論で取り扱っている「数覚」とは異なり，数に関する感覚や直観を意味している）．4以上の数も必要とされる社会を作った人類は大きな数を認識する神経回路を脳に作ることができるようになった．その神経回路は言語や文化と深く関係しているようである[4)]．いずれにしても地球上の生命はおそらく

は同一の祖先をもつであろうから，複雑な神経回路を構成できるか否かは別として，神経回路の作り方のパターンは生物間で共通である可能性は高い．それが，地球外の生命体（もし存在したらの話ではあるが）と共通であるという保証はどこにもないから，数学を脳の神経回路の構成と結びつけて考える限りは，地球外の生命体が数学を発展させていると結論づけることはできない．しかし，神経回路の構成も最終的には化学法則，物理法則に従うだろうから，何らかの共通点は存在するであろう．そのことは，人類とは独立に数学の世界が存在することを何も意味しないが．

数学者の多くは数学は人間を離れて存在しており，プラトンのイデアの世界に比せられる数学の世界が存在し，数学者はその一部を見ることしかできないと考えている．数学の新しい理論や定理は「発見」されたものであり，「発明」されたものではないと多くの数学者が考える理由でもある．それは数学者の思い込みに過ぎないと言うこともできようが，それでは数学が，なぜ自然科学を記述する言語としての役割を持ち得るのか，単なる神経回路を超えた何者かを考えたくなる所以でもある．

2. 社会と数学

しかしながら，数学の歴史を振り返ると，数学の有り様は社会の有り様，文化，文明の有り様と深く関係し，世界中で一様に発展してきたわけではないことが分かる．今日の数学は古代ギリシア文明に決定的な影響を受けていて，その延長線上にある．しかし，数学の歴史をふり返ると，古代ギリシアの数学が極めて特異であって，論理を全面的に展開する数学がなぜ古代ギリシアでしか誕生しなかったのかは謎としか言いようがない．

古代ギリシアの数学と類比されるのが古代中国の数学である．紀元前後にまとめられたとされる『九章算術』では古代ギリシアよりも進んだ面もあった．負の数を取り扱っていたこと（基本的には負の数の足し算，引き算であり，掛け算は扱われるのは中国では10世紀以降である），連立一次方程式の解法として今日のいわゆる掃き出し法と同等の手法を用いていたこと，算籌（さんちゅう）と呼ばれる棒を使っていたにせよ，最初から10進位取り記数法に基づいて数の計算を行っていたことなどがあげられる[1,3]．しかしながら，古代ギリシアに見られる論理性は顕著ではない．『九章算術』以降の中国の数学書はすべて問題とその解答と解法が説明されるだけで，問題の背後にある，理論の説明は全く記されなかった．中国では高度な数学は暦の作成に必要とされた．12，13世紀以降，金および宋・元時代に中国では方程式論が高度に発達した[3]．それは暦の作成に高次方程式を立てて解くことが必要になったことと関係していた．この方程式論は暦作成に関わるごく一部の人だけが理解していたようで，明代になると方程式論は中国では全く忘れ去られてしまった．明建国時の混乱で多くの知識人が虐殺されたが，おそらく方程式論を理解した人がすべて殺されてしまったからと思われる．明代の数学書は宋・元時代の数学の消化不良の寄せ集めでしかなかった．このように数学はごく一部の人によって，実用のために保持されてきたのが中国数学の伝統であった．また，中国では天文学でも極めて特異な現象が見られる．中国の天文学では天体のモデルを作ることはなかった．天体の位置を表す式が得られればそれでよしとし，そうした式が得られる天体モデルを構築することには全く関心を持たなかった．プトレマイオスの天体モデル（周転円モデル）から脱却するのに要したコペルニクス以降のヨーロッパの天文学の歴史を考えると信じられないことであるが，現代科学の手法が決して昔から一般的だったわけではないことは注意する必要がある．

そうした中国ではあるが，数学で論理が全く無視されていたわけではない．三国時代の魏で活躍した劉徽は中国の伝統数学の枠を超えて数学を進展させた．彼は『九章算術』に記された問題の解法のよって立つ原理に興味を持ち，証明に近いアイディアを有していて，『九章算術』の注釈を行った．その中では劉徽の円周率の計算が特に有名である[1,3]．しかし球の体積を求める問題では証明を完成させることができず，自らの不完全な議論を

注釈に記して，正しい理論を後学を待つと記しているところ（文献 1）第 4 章「少広」）などは，極めて近代的な科学的精神の持ち主であったことが分かる．しかし，劉徽の精神は中国の伝統数学では理解されることはなかった．

16 世紀後半マテオ・リッチと李之藻によって，クラヴィウスの『実用算術』を翻訳し中国伝統数学で増補して作成された『同文算指』も依然として中国数学の伝統の中にあった．『実用算術』に記された理論的な説明は翻訳から除外され，問題と解き方だけが記される中国伝統数学の書き方に倣っている．もちろん，『実用算術』という，実用面に重きを置いた教科書の翻訳であるのでそうした側面があることは致し方ないが，中国の数学書ではじめて西洋数学の筆算法を取り入れた教科書であれば，今少し理論的な部分の説明があってもよいと今日の数学者であれば考えるであろう．

こうした例から分かるように中国伝統数学においては，論理や一般論は重要視されなかった．古代ギリシアとその後のヘレニズム時代は中国では戦国時代から秦へと統一が始まった時代であった．戦国時代，合従連衡が盛んだった時代には多くの論客が誕生し，論戦を闘わせたが，それは論理を進展させるよりは，政治的な駆け引きが主要なテーマであった．ギリシア文化の特異性，あるいは逆から見れば中国文化の特異性ということができるが，古代ローマもギリシア数学に全く関心を示さなかったことを考えれば，やはり古代ギリシア文化の特異性が際立つ．

ところで，中国伝統数学から出発した江戸時代の和算でも論理はそれほど重視されなかった．しかし，関孝和は数学のあり方を中国伝統数学の中ではあるが大きく変えた．関孝和は江戸時代の数学者としては極めて特異で一般論を重視した．日本に伝わった中国伝統数学は 1 変数の方程式しか記述する術（すべ）を持たなかったのに対して，関孝和は多変数の方程式を記述する方法（傍書法）を考案し，さらに連立高次方程式を解くために変数を消去する理論，今日，終結式の理論と呼ばれる一般論を『解伏題之法』で展開した．中国伝統数学では方程式は単に問題を解くための手段であった．しかも，問題を解くために高次の連立方程式を立てても，その方程式に応じて変数の消去を工夫したほうが簡単な場合が多い．しかし，関孝和は終結式の一般論の構築を行った．中国伝統数学からの大きな飛躍であった．しかし，その関孝和も理論を一般的に書く手段をもたず，その記述の仕方は中国伝統数学の框を越えることはできず，証明を記すこともなかった．証明に関して関孝和がどのように考えていたかは残された文献からは推測することはできないが，弟子たちには口頭で何らかの説明をしていたと考えられる．

このように，様々な文化圏での数学の有り様を見てくると，その違いの大きさが目につくが，しかし，その一方で，数学としての多くの類似点も目につく．その共通点は数学という学問の特徴を表していると考えることができる．特に，数学の論理性は数学の発見にはあまり役に立たず，むしろ数学を理解し共有するために大切な役割をすることは強調しておく必要がある．また，数学ではひとたび証明された事実は未来永劫正しいことも他の学問とは著しく異なる点である．

3. イプシロン・エヌ論法

ところで，数学を理解し共有する営みは多くの場合学校教育を通して行われるが，理論を理解することは単に定理の証明をいくら読んでも得られるものではない．また定義で述べられる数学上の概念も定義を読むだけではなかなか理解できない場合がある．その典型的な例として数列の極限に関する ε-N 論法を見てみよう．

数列 $\{a_n\}$ が α に収束することは n が大きくなるに従って α に近づくこと，言い換えれば n が大きくなるにつれて $|a_n-\alpha|$ がどんどん小さくなることを意味する．この素朴な定義が不十分であることは次の事実を証明しようとするときに明らかになる．

定理 1. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば，この数列を平均してできる数列 $\{b_n\}$

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
も α に収束する．

この定理を証明するためには収束することをさらに明確に定義し直す必要がある．日本の多くの数学書には次のような“定義”が記されている．

定義 1. 数列 $\{a_n\}$ が α が収束することは次のことを意味する．任意の正の数 ε に対して正整数 N が存在して，$n \geq N$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つ．

一読して何を意味しているのか理解不能である．よく読んでも，日本語としておかしく，何を主張しているのかよく分からない．実はこれは次の英文の“直訳”である．

For any positive number ε there exists a positive integer N such that we have

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

for any $n > N$.

この英文を読めば，少なくとも ε に対して正整数 N が存在することが定義の中心であることが分かる．ところが，上の“定義 1”ではそのことが不明であり，むしろ不等式のほうが重要そうに見える．そうすると「$n > N$ であれば」がなぜ記されているのかよく分からなくなる．これは日本語と英語の文法上の問題で，語順が異なるにも関わらず，such that をたんに「して」と訳してしまったからからである．このことを考慮すれば次のように定義を記すべきであろう．

定義 2. 数列 $\{a_n\}$ が α が収束することは次のことを意味する．任意の正の数 ε に対して次の条件を満たす正整数 N が存在する．

（条件）任意の $n > N$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．

これで一応文法上の問題はクリアされたが，この定義がなぜ数列 $\{a_n\}$ が α に近づくのを意味するか理解できないであろう．近づくという動的な挙動に対して，定義 2 は極めて静的である．このことが，心理的に定義を受け入れがたいものとしている．

実は「任意の正の数 ε」がこの違和感を解く重要な働きをする．「任意」に正の数 ε を選ぶことができるから，$\varepsilon = 1/m$ とおいて $m > 0$ をどんどん大きくしていけば ε はどんどん 0 に近づいていく．このように考えれば上の定義は例えば次のように言い換えることもできる．

定義 3. 任意の正整数 m に対して次の条件を満たす正整数 N_m が存在する．

（条件）任意の $n > N_m$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{m}$$

が成り立つ．

m をどんどん大きくしていけば $1/m$ は 0 に近づいていくので，このように定義したほうがよいように思われるかもしれない．たしかに分かりやすくなるが，この定義は ε を $1/m$ と限定してしまったのでむしろ不便であることが分かる．ε を限定しないほうが便利なのである．

さて $\varepsilon > 0$ を一つ選んで

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる条件を考えてみよう．この条件を数直線上に図示してみると α から幅 ε の区間 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ に a_n が入ることを意味していることが分かる．

従って数列 $\{a_n\}$ が α に近づくのであれば，ある番号から先の a_n はすべて区間 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ に入っていなければならない．従って ε を小さく取り直していってもかならず，ある番号から先の a_m は区間 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ に含まれなければならない（図 1）．このように任意に ε をとることができる

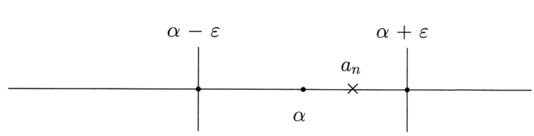


図 1

ので，ε をどんどん小さくしていくことによって最初の素朴な収束の定義と一致することが次第に理解できるようになる．しかし，「任意」という言葉が，理解を困難にする．「任意」を「すべて」と言い換えてもよいのであるが，いずれにしても「任意」であるのでどんな ε に関しても不等式 $n > N$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような N を見出すことができ，従って $\varepsilon = 10000$ であってもよいのだから近づくとは言えないのではないかと思いたくなる．「任意」であることは ε はどんなに小さくてもよいことを意味するのだが，最初はどうしても大きい ε に注意が行きがちになる．何度かこの違和感を経験して，やがてこの定義を受け入れることができるようになる．この違和感はおそらく定義2で ε に対して N をどのように決めるかが何も触れられていないことにも起因しているように思われる．実際に数列が収束することをこの定義2によって示そうとすれば，そのためには ε に対して N を具体的に求める必要がある．このギャップもまた違和感を増す．しかし，そうした手続きは数列によって異なる可能性があるので，そのような手続きを定義に導入することはできない．

定義2を使って定理1を証明してみよう．

[定理1の証明]　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるので任意に $\varepsilon > 0$ をとると「$n > N_1$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ」ように正整数 N_1 を見出すことができる（ここで不等式の右辺が ε ではなく $\varepsilon/2$ になっているのを奇妙に思われるかもしれない．そのときは ε のかわりに $\varepsilon/2$ を最初に選んだと考えればよい）．またこの ε に対して「$n > N_2$ であれば

$$\left|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_{N_1}-\alpha)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ」ように N_2 を見出すことができる．これは絶対値の中の分子は決まった数であるので分母の n を大きく取れば，この分数の絶対値は小さくなるからである．そこで N として N_1 と N_2 のうちで大きいほうをとると $n > N$ のときに

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| \\
&= \left|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n}\right| \\
&\le \left|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_{N_1}-\alpha)}{n}\right| \\
&\quad + \left|\frac{(a_{N_1+1}-\alpha)}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{(a_n-\alpha)}{n}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon - \frac{\varepsilon N_1}{2n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち $n > N$ であれば

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$$

である．　［証明終］

このように定義2は極めて強力である．また，以上のような証明を何度も自ら体験することによって定義2の意味が理解できてくる．ただ，そこにも個人差が大きく，定義2を理解するのにそれほど苦労しない人もいれば，私のように何度も試行錯誤をしないと理解できない場合もある．ただ，最悪の場合でも，時間はかかり苦労はするかもしれないがやがて理解できるようになる．これは私たちが数覚を根源的には所有しているが，それをどのようにしたら開花させることができるかは個人差があり，それが何に起因するかはまだ手つかずの分野であることを意味しているように思われる．

参考文献

1) 川原秀城訳「劉徽注九章算術」，藪内清編『科学の名著2　中国天文学・数学集』に収録，朝日出版社（1980年）．
2) ジャン・ピアジェ著，田辺振太郎・島雄元訳『発生的認識論序説　第1巻　数学思想』，三省堂（1975年）．
3) 銭宝琮編，川原秀城訳『中国数学史』，みすず書房（1990年）．
4) スタニスラス・ドゥアンヌ著，長谷川眞理子・小林哲生訳『数覚とは何か？―心が数を創り，操る仕組み―』，早川書房（2010年）．

（うえの・けんじ，四日市大学関孝和数学研究所）

統計的推論の高次漸近理論 (3)

統計的推論および局外母数モデル

甘 利 俊 一

今回は統計的推論の高次漸近理論の最後として，検定の幾何学的理論を述べる．検定にはいろいろな方式があり，どれがどのような特性を有し，どれを使うのが良いのかはっきりとしなかった．幾何学的理論はこの問題を解決した．もちろん，検定にはいろいろな問題設定があって複雑であり，一筋縄ではいかない．ここではその一端を述べる．なお，次回へのつなぎとして，局外母数（攪乱母数とも言う）を含む統計モデルの幾何学についても触れる．

14.1 指数型分布族における検定と分類

指数型分布族における推定は極めて簡単であった．そこで，検定と分類についても，まず指数型分布族を用いて基本を述べておく．分布族の空間を $S = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})\}$ とし，単純仮説検定を考える．これは 2 つの仮説

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 \tag{14.1}$$

を用意する．このとき，観測されたデータ $D = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$ をもとに，帰無仮説 H_0 は対立仮説に対して妥当でないとして，棄却できるかどうかを判定する．

仮説 H_0 が真であるときに，これを偽だとして棄却する誤りを第 1 種の過誤という．逆に，仮説 H_1 が真であるのに，仮説 H_0 を棄却しない誤りを第 2 種の過誤という．仮説検定は第 1 種の過誤を一定水準 α（有意水準という）以下に抑えた上で，第 2 種の過誤を最小にする．このとき，Neyman–Pearson の基本定理が知られている．

定理 14.1 Neyman–Pearson の定理：最良の仮説検定は尤度比の対数

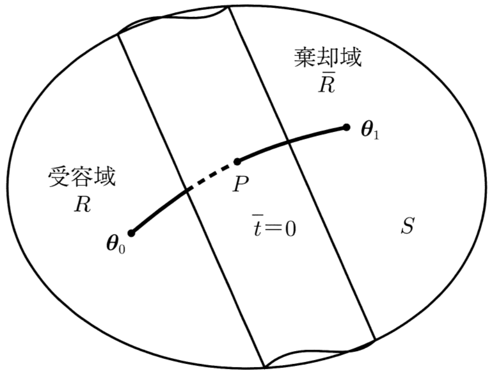


図 14.1　仮説検定の受容域と棄却域.

$$t(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_i \log \frac{p\,(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}_1)}{p\,(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}_0)} = \log \frac{p\,(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_1)}{p\,(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_0)} \tag{14.2}$$

を検定統計量とし，これが有意水準 α によって決まる一定値 λ_α より大きければ H_0 を棄却し，小さければ棄却しない．

補題の証明は簡単である．この定理を幾何学で考えよう．棄却するか否かの限界式は，$\bar{\boldsymbol{x}}$ をデータ $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ の算術平均値として

$$\log \frac{p\,(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_1)}{p\,(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_0)} = (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_0) \cdot \bar{\boldsymbol{x}} - \psi\,(\boldsymbol{\theta}_1) + \psi\,(\boldsymbol{\theta}_0) = \lambda_\alpha \tag{14.3}$$

である．双対アファイン座標 $\boldsymbol{\eta}$ で考えれば，上式が成立する $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ は S の空間で双対座標（$\boldsymbol{\eta}$ 座標）での超平面 (14.3) 上にあり，(14.3) が正になる領域が受領域で，データ $\bar{\boldsymbol{x}}$ がここに入れば仮説を棄却しない．逆に，これが負になれば，棄却域 R であり，仮説を棄却する．空間 S は双対超平面 (14.3) によって二分割される（図 14.1）．いま，2 点 $\boldsymbol{\theta}_1$ と $\boldsymbol{\theta}_2$ を結ぶ e–測地線を考える．すると，この m–超平面は測地線に直交する．測地線のどの点（図では P 点）で直交するかは，有意水準 α に依存して決まる．すなわち，

$$\int_R p\,(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_0)\, d\bar{\boldsymbol{x}} = \alpha \tag{14.4}$$

となるように決める．

検定では水準 α を決めて，仮説 H_0 を棄却するかどうかをデータ D に基づいて決めた．しかし，どの水準にすると棄却することになるか，これを細かく計算することもできる．すなわち，真の分布が H_0 のとき，水準 α をどこに取れば仮説が棄却されるか，このぎりぎりの値を p 値と呼び，p 値を示すことも多い．

次に，2 つの固定した分布 $P_1 = p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$ と $P_2 = p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_2)$ を考え，データ $\boldsymbol{x}$ をもとにこれを発生した情報源は P_1 であるか P_2 であるかを決める分類問題を考えよう．S を分割する 2 つの領域 R_1 と R_2, $R_1 \cap R_2 = \phi$, $R_1 \cup R_2 = S$ を考え，$\bar{\boldsymbol{x}} \in R_1$ なら P_1 から出たデータ，$\bar{\boldsymbol{x}} \in R_2$ なら P_2 から出たデータとする．決定誤差を最小にする Bayes の立場に立てば，領域を決めるのに誤り決定の確率

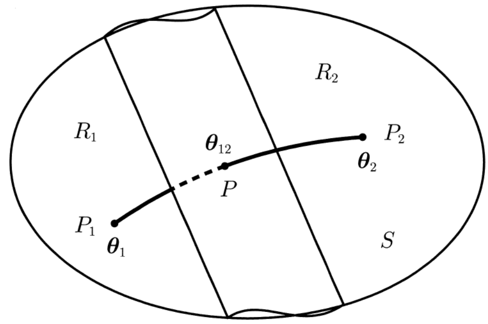


図 14.2　データ $\bar{\boldsymbol{x}}$ を 2 つの分布 P_1 と P_2 に分類する．

$$e = \int_{R_1} p\left(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_2\right) d\bar{\boldsymbol{x}} + \int_{R_2} p\left(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}_1\right) d\boldsymbol{x} \tag{14.5}$$

を最小となるようにすればよい．このとき，変分計算によって，最適な領域分割の境界は双対平坦な超平面

$$(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2) \cdot \bar{\boldsymbol{x}} = c \tag{14.6}$$

で与えられる．これは，P_1 と P_2 を結ぶ測地線を $\boldsymbol{\theta}_{12}$ 点で直交に横断する（図 14.2）．その交点 $\boldsymbol{\theta}_{12}$ は KL ダイバージェンスによる P_1 と P_2 の中点，

$$KL\left[p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_{12}\right) : p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_1\right)\right] = KL\left[p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_{12}\right) : p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_2\right)\right] \tag{14.7}$$

である．誤り確率はこれを用いて (14.5) の積分を実行すればよい．多数のパターン $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ が同一の分布から発生する漸近理論では，誤り確率が漸近的に KL ダイバージェンスを用いて

$$e = \exp\left\{-NKL\left[p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_{12}\right) : p\left(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\theta}_1\right)\right]\right\} \tag{14.8}$$

と書けることを前に見た．これは大偏差定理である．

なお，P_1 を誤るときと P_2 を誤るときで重みを変える場合や，P_1 と P_2 に事前分布を考える場合も議論は同じで，交点の位置 $\boldsymbol{\theta}_{12}$ がその値に応じてずれるだけである．

14.2 検定の高次漸近理論

曲指数分布族の場合も，幾何学を用いると高次の漸近理論が作れる．検定では帰無仮説と対立仮説をどうとるかで，いろいろな場合がある．ここでは最も簡単な 1 次元曲指数分布モデル

$$M = \{p(\boldsymbol{x}, u) = p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}(u))\} \tag{14.9}$$

を考える．u はスカラーパラメータであるから，M は S の中の曲線である．

帰無仮説として $H_0 : u = u_0$，対立仮説として $H_1 : u > u_0$ を考えよう．対立仮説として，両側の検定 $H_1 : u \neq u_0$ を考える場合もある．これも同様のやり方で議論でき，似た性質が現れるので，ここでは片側対立仮説（$H_1 : u > u_0$ の場合）だけを述べる．

仮説検定では，S 内に棄却域 R を設定し，データ $\bar{\boldsymbol{x}}$ が R に入れば仮説 H_0 を棄却し，R の補集合である受容域 $\bar{R}$ に入れば棄却しない (受容する)．仮説検定方式 T を決めるとは，棄却域 R を決めることである．このとき，有意水準 α を先に定める．これは $u = u_0$ が真であるときにこれを棄却しない確率で，R は

$$\int_R p\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}\left(u_0\right)\right) d\boldsymbol{x} \leq \alpha \tag{14.10}$$

を満たさなければならない．その上で，真の値が $u > u_0$ のときに H_0 を棄却する確率をできるだけ高めたい．真の値が u であったときに仮説を棄却する確率を u 点での検出力と呼ぶ．これは

$$P_T(u) = \int_R p(\boldsymbol{x}, u) d\boldsymbol{x} \tag{14.11}$$

と書ける．もちろん，$u = u_0$ 点での検出力は有意水準である．$P_T(u)$ を，検定方式 T の検出力曲線と呼ぶ．有意水準を保ちつつこれを高くしたいが，どの u で高くするかが問題となる．

N が大きい漸近理論を考えるから，対立仮説の u は，u_0 の近くにあるとして良い．遠いときは間違いなく棄却できるからである．そこで，パラメータ u のスケールを変えて t を用い，

$$u_t = u_0 + \frac{t}{\sqrt{N g}} \tag{14.12}$$

とする．g は u_0 点での Fisher 情報量である．検定 T の検出力曲線 (14.11) を，t を用いて

$$P_T\left(u_t\right) = P_1(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} P_2(t) + \frac{1}{N} P_3(t) + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right) \tag{14.13}$$

のように展開する．$1/\sqrt{N}$ 以上の項を無視すれば，$P_1(t)$ を最大にする検定を求めることになる．これが 1 次の検定の漸近理論である．ある検定 T が他の検定 T' と比べて，すべての t で

$$P_T\left(u_t\right) \geq P_{T'}\left(u_t\right) \tag{14.14}$$

が成立するとき，この検定を 1 次漸近一様最強力検定という．この検定は 1 次の項までを見れば，どの u でも検出力が最も高い．まずこれを求める．このような検定はいくつも知られている．その次に議論するのが，2 次，3 次の項である．

検定 T の棄却域 R の境界面は，モデル曲線 M を横断する (図 14.3)．1 次の漸近理論で検出力を求めるには，真の分布が u にあったとして，ここから出たデータ $\bar{\boldsymbol{x}}$ が R に入る確率を求める．このとき，$\boldsymbol{w}$ 座標を用いるとよい．R の境界面は曲線 M を横断し，水準 α を変えれば横断点が M 上を動く．u 点を横断する面を $A(u)$ とし，これを検定方式 T に対応する補助多様体とする．すると，検定 T を評価するのに都合の良い座標系 $\boldsymbol{w}$ が得られる．真の分布が u のときの，$\hat{\boldsymbol{w}}$ の分布は前に求めた．1 次の理論ではこれは，漸近的にガウス

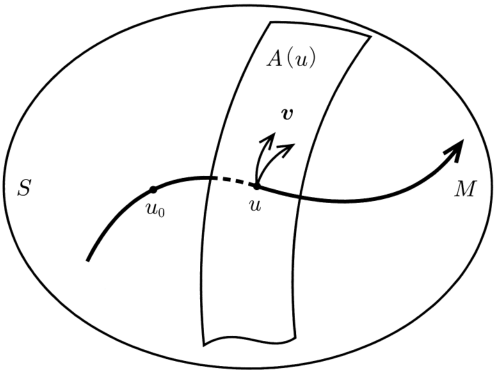


図 14.3　検定における補助多様体 $A(u)$．各 u に，$A(u)$ を付ける．

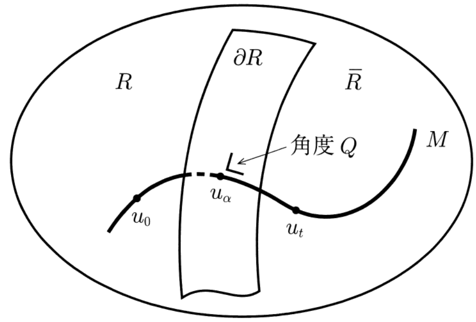


図 14.4　受容域の境界は u_α を通る補助多様体である．真の分布が u_t のとき，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の分布を $\bar{R}$ 上で積分するが，このとき u_t の補助多様体 $A(u_t)$ で座標 $\tilde{\boldsymbol{w}}$ を用いる．

分布である．だから，これを R 領域上で積分する．漸近理論では u の近くだけを考えればすむから，この積分が可能になる．

1 次の漸近理論では，真の分布が u_t のとき，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の分布は $\boldsymbol{\eta}(u_t, 0)$ のごく近くに集中している．すなわち $\tilde{\boldsymbol{w}}$ の分布は 0 の近くに集中したガウス分布である．これを棄却域 R 上で積分すれば検出力曲線が得られる．この計算に，棄却域 R の境界 ∂R を M の近傍で線形近似して，M をよぎる線形空間として計算してよい．∂R が M をよぎる場所 u_α とよぎるときの角度だけが問題である．よぎる位置 u_α は，有意水準 α を満たすように計算する（図 14.4）．このとき，$\tilde{\boldsymbol{w}}$ のガウス分布を $\tilde{\boldsymbol{v}}$ について積分して，$\tilde{u}$ の周辺分布を求めると，それは分散が

$$\bar{g}_{ab} = g_{ab} - g_{a\kappa} g_{b\lambda} g^{\kappa\lambda} \tag{14.15}$$

のガウス分布になることを用いる．ただし，今の場合，添字 a, b は 1 のみの値を取る．

1 次漸近理論での計算はさほど困難ではなく，検出力曲線は，誤差積分関数

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} dr \tag{14.16}$$

を用いて，$g = g_{ab}, \bar{g} = \bar{g}_{ab}$ として

$$P_1(t) = \phi\left\{u_1(\alpha) - \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}}\, t\right\} \tag{14.17}$$

で与えられる．ここに $u_1(\alpha)$ は水準 α によって決まる定数である．明らかに $g \geq \bar{g}$ であるから，検出力は $\bar{g}$ が大きいほど高い．一番高いのは等号 $g_{ab} = \bar{g}_{ab}$ が成立するときで，このとき R の境界面は M に（漸近的に）直交する．ϕ は単調増大関数であるから，検出力はどの u_t においても，∂R を M に漸近的に直交するように取るときが最大である．これは，検定の漸近理論でよく知られている結果を幾何学を用いて統一的に導いたものである．なお，1 次最強力検定の検出力は，S やモデル M によらず一つも同じ式 (14.17) で与えられる．1

次漸近理論は接空間を用いた線形の理論であるから，Fisher 情報量で規格化すれば，どの問題でも同じになる．

定理 14.2　棄却域の境界面が M に漸近的に直交するとき，このときに限り，検定は漸近一様最強力である．

14.3 1 次最強力検定の例

漸近 1 次最強力検定には，いろいろな方式が知られている．いくつか，典型的なものを挙げておこう．

1. Wald 検定（最尤推定による検定）

これは検定統計量として，最尤推定量 $\hat{u}(\bar{\boldsymbol{x}})$ を用いるもので，具体的には

$$t(\bar{\boldsymbol{x}}) = g(u_0)(\hat{u} - u_0)^2 \tag{14.18}$$

を用い，これがある一定値を超えるか否かによって仮説 H_0 を受容するか棄却するかを決める．すなわち，棄却域 R の境界は $t(\bar{\boldsymbol{x}})$ が一定であるから，最尤推定量 $\hat{u}$ を用いて，$\boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{x}}$ ならば

$$\hat{u}(\boldsymbol{\eta}) = 一定 \tag{14.19}$$

で定まる．この式を満たす $\boldsymbol{\eta} \in S$ は最尤推定の補助多様体と一致する．すなわち，∂R は m 座標系で平坦で，M と厳密に直交している．

2. 尤度比検定

これは，検定統計量として，尤度比

$$t(\bar{\boldsymbol{x}}) = -2 \log \frac{p(\bar{\boldsymbol{x}}, u_0)}{p(\bar{\boldsymbol{x}}, \hat{u})} \tag{14.20}$$

を使う．このとき，検定統計量の値が一定となる R の境界面は m 平坦で，しかも M と漸近的に直交している．厳密に直交しているわけではない．

3. Rao 検定（有効スコア検定）

これは Rao が提案したもので，u_0 点でのスコア関数 $l'(\bar{\boldsymbol{x}}, u_0)$ の値に応じて仮説の採否を決める．具体的には検定統計量として，

$$t(\bar{\boldsymbol{x}}) = g(u_0)\{l'(\bar{\boldsymbol{x}}, u_0)\}^2 \tag{14.21}$$

を用いる．境界面は m 平坦であり，M とは漸近的に直交している．

こうたくさんあると，どれを使えばよいか困る．実は検定方式は他にもまだたくさんある．これらの 1 次有効な検定方式はそれぞれどんな特性を持つのであろうか．これについては，いろいろ議論があったが，個別の例を調べるのみですっきりとした回答は得られていなかった．情報幾何が高次漸近理論を展開し[1~3]，決め手となる回答を与えた．

14.4 検出力の高次の特性

比較的簡単にわかることは

定理 14.3 すべての 1 次漸近一様最強力検定は，同じ 2 次の項 $P_2(t)$ を持つ．

2 次の $1/\sqrt{N}$ のオーダーの項を比べても同じであるから，これは検定の特性の比較には関係しない．そこで，さらに $1/N$ のオーダーの 3 次の項 $P_3(t)$ を比較する．このためには，$\tilde{\boldsymbol{w}}$ の分布の高次の特性を用いるとともに，境界面を線形近似するのではなくて，曲率を考えに入れて 2 次関数で近似する．さらに，境界面と M との角度 $g_{a\kappa}$ をより厳密に評価する．すなわち，漸近直交の場合これは厳密に 0 ではなくて

$$g_{a\kappa}\left(u_t\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \tag{14.22}$$

である．ここで，境界 ∂R が u_t で M をよぎるとき，そのときの角度を

$$g_{a\kappa}\left(u_t\right) = \left(u_t - u_0\right) Q_\kappa \tag{14.23}$$

と置く．$(u_t - u_0)$ は $1/\sqrt{N}$ のオーダーである．こうして積分を実行すると答えが出る．この計算は，技術的なものとはいえ大変面倒である．そこで答えは文献 2, 3) などに譲ることにする．この計算からいえることは，1) 境界面 ∂R が m 平坦でないと 3 次検出力に損失が出る．2) 3 次検出力関数は

$$Q_\kappa - J(t) H^{(e)}_{ab\kappa} g^{ab} \tag{14.24}$$

を二乗した項を含む．ここに J は水準に依存した t の関数である．この自乗を 0 にしたいが，t によらずにこれを一様に 0 にすることはできない．しかし，角度 Q_κ をモデルの e 曲率に依存してうまく取ることにより，これを減らすことができる．しかし，Q_κ を決めれば減り方は t に依存する．これより，M が指数型分布族で $H^{(e)}_{ab\kappa} = 0$ である場合を除いては，高次漸近理論ではもはや一様最強力検定は存在しないことが明らかになった．

先に挙げた 3 つの検定方式は，それぞれどの t で検出力が高いか，その違いが特徴になる．そこで，今問題にする検出方式の 3 次検出力から t 毎に最良の 3 次検出力を差し引いた，3 次の検出力損失関数を計算してみる．これを図示したのが図 14.5 である．

ここでは述べなかったが，局所最強力検定も図 14.5 に書いておいた．また，最良検定とは，関数 J を定数にしてそれをミニマックスで定めたもので，新しい検定方式として提唱できる．図 14.5 を見ると，Rao 検定は実は局所最強力検定になっていて，なるほど t が小さいところでは良いが，t が 3 ぐらいの比較的良く使うあたりでの検出力はかなり悪い．Wald 検定は t が 1〜2 あたりの小さいところで損失がある．これに比べると尤度比検定は比較的全域で検出力が高く，推奨できる．

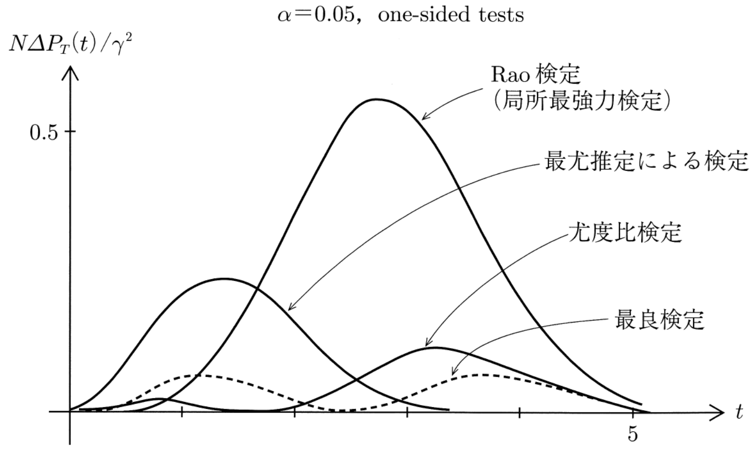


図 14.5　各種の検定方式における検出力の損失.

14.5 局外母数を含む統計モデル

少し話が変わるが最後に，次回への導入をかねて，2 種類の未知パラメータ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}$ で指定される統計モデル

$$M = \{p(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi})\} \tag{14.25}$$

の幾何を考えよう．$\boldsymbol{u}$ も $\boldsymbol{\xi}$ もベクトルパラメータとし，それぞれ指標 a, κ などを用いて $\boldsymbol{u} = (u^a), \boldsymbol{\xi} = (\xi^\kappa)$ のように表す．パラメータを合わせて，$\boldsymbol{w} = (w^\alpha) = (u^a, \xi^\kappa)$ とする．

確率分布がパラメータ $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi})$ で指定されるが，実はデータ D から推定したいのは $\boldsymbol{u}$ であって，$\boldsymbol{\xi}$ は何であってもよいとき，$\boldsymbol{u}$ を関連母数，$\boldsymbol{\xi}$ を局外母数または撹乱母数という．例を挙げよう．

例 1　秤の問題： x をガウス分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従う確率変数とする．x を何回か測定して，パラメータ μ, σ^2 を推定したい．このとき，平均 $u = \mu$ を知りたいが，分散 $\xi = \sigma^2$ はどうでもよい人にとっては，μ が興味ある関連母数，σ^2 は局外母数である．逆に，平均 μ はどうでもよいが，分散 σ^2 を知りたければ，$u = \sigma^2$ が関連母数，$\xi = \mu$ は局外母数である．

例 2　比例係数の問題： (x, y) をそれぞれ平均が μ_x, μ_y で，分散 1 の互に独立のガウス分布とする．実は，(x, y) はある鉱石の体積と重量であって，その比重

$$u = \frac{\mu_y}{\mu_x} \tag{14.26}$$

を知りたいとする．μ_x や μ_y の値自体はどうでもよい．このとき，パラメータとして上記の u と $\xi = \mu_x$ を用いれば，

$$x \sim N(\xi, 1), \quad y \sim N(u\xi, 1) \tag{14.27}$$

に従うから，確率分布は

$$p(x,y;u,\xi)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(x-\xi)^2+(y-u\xi)^2\right\}\right] \tag{14.28}$$

と書ける.

例 2 の場合は，パラメータ $\boldsymbol{w}=(\mu_x,\mu_y)$ で指数される確率分布のデータを用いて，パラメータの関数 $\boldsymbol{u}$（$\boldsymbol{u}$ は多次元でよい）

$$u^a=f^a(\boldsymbol{w}),\quad a=1,\cdots,n \tag{14.29}$$

の値を推定する問題といってもよい．このとき，$\boldsymbol{w}$ を $n+m$ 次元として，u^a を補うパラメータ

$$\xi^\kappa=g^\kappa(\boldsymbol{w}),\quad \kappa=1,\cdots,m \tag{14.30}$$

を用いれば，これは局外母数 $\boldsymbol{\xi}$ があるときに $\boldsymbol{u}$ を推定する問題となる．例 2 の場合は $\boldsymbol{w}=(\mu_x,\mu_y)$,

$$u=f(\boldsymbol{w})=\frac{\mu_y}{\mu_x} \tag{14.31}$$

が知りたい値である.

局外母数があろうとなかろうと，パラメータ $\boldsymbol{w}$ をデータから推定し，そのあとで必要な $\hat{\boldsymbol{u}}$（または $f^a(\hat{\boldsymbol{w}})$）を取り出せば良い．だから，局外母数など，特別に議論する必要はないと考えるかもしれない．しかし局外母数の数がデータと共に増えていく場合には，次回に述べるように大変なドラマが待っている．まず，Fisher 情報行列から始める.

モデルの Fisher 情報量行列は，$\boldsymbol{u}=(u^a)$ の部分と $\boldsymbol{\xi}=(\xi^\kappa)$ の部分からなり，

$$g_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} g_{ab} & g_{a\kappa} \\ g_{\lambda b} & g_{\kappa\lambda}\end{bmatrix} \tag{14.32}$$

のように小行列に分割した形で書ける．もちろんこれらは対数尤度の微分（スコア関数）から

$$g_{ab}=E\left[\partial_a l(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\partial_b l\,(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\right], \tag{14.33}$$

$$g_{a\kappa}=E\left[\partial_a l(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\partial_\kappa l(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\right], \tag{14.34}$$

$$g_{\kappa\lambda}=E\left[\partial_\kappa l(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\partial_\lambda l(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})\right] \tag{14.35}$$

である．その逆行列は $g^{\alpha\beta}$ で，これは $\boldsymbol{w}=(v^a,\xi^\kappa)$ をまとめて推定したときの，最尤推定量 $\hat{w}^\alpha$ の誤差漸近分散（の $1/N$ 倍，N 観測数）を与える．とくに，その (a,b) 成分 $\bar{g}^{ab}$ は，推定量 $\hat{u}^a$ の誤差の漸近分散である．$\bar{g}^{ab}$ の逆行列は g_{ab} と違い，

$$\bar{g}_{ab}=g_{ab}-g_{a\kappa}g^{\kappa\lambda}g_{\lambda b} \tag{14.36}$$

である．局外母数があるときの u^a に関する実質的な Fisher 情報量は g_{ab} では

なくて $\bar{g}_{ab}$ で，$\bar{g}_{ab} \leq g_{ab}$（正定行列の意味で）だから情報量が局外母数のせいで減ってしまう．

今仮に，$\boldsymbol{\xi}$ の値が $\boldsymbol{\xi}_0$ であることがわかっていたとしよう．この値を固定すれば，未知パラメータは $\boldsymbol{u}$ だけで，このときの Fisher 情報行列は (14.33) 式で $\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{\xi}_0$ 固定したもの，また $\hat{\boldsymbol{u}}$ の誤差の漸近分散は (g_{ab}) の逆行列である．$\boldsymbol{\xi}$ を知らなければ，Fisher 情報量が g_{ab} から $\bar{g}_{ab}$ へ減る．その理由を幾何学で調べよう．

M で，$\boldsymbol{u}$ 軸方向の接ベクトルは確率変数で表現してスコア関数

$$\boldsymbol{e}_a = \partial_a l(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) \tag{14.37}$$

であった．同様に $\boldsymbol{\xi}$ 軸方向の接ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_\kappa = \partial_\kappa l(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) \tag{14.38}$$

である．この 2 つは一般には直交せず

$$g_{a\kappa} = \langle \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_\kappa \rangle = E\left[\partial_a l \partial_\kappa l\right] \neq 0 \tag{14.39}$$

である．$\boldsymbol{e}_a$ は u^a が変わると対数尤度がどう変わるかを示し，尤度最大の $\boldsymbol{u}$ を求めるのが最尤推定である．局外母数のある場合は $\boldsymbol{\xi}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ も同時に求まるが，$\hat{\boldsymbol{\xi}}$ には推定誤差があるから，その影響で，$\boldsymbol{e}_a = \partial_a l\left(x, \boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\xi}}\right)$ も真の $\boldsymbol{\xi}$ の値からすると誤差を含む．その誤差によって，Fisher 情報量が g_{ab} から $\bar{g}_{ab}$ に減る．

終わりの一言

今回は統計的推論の高次の理論を述べた．1970–80 年代，高次漸近理論が世界各地で興った．微分幾何を用いた理論もこの時代にできたが，心ない統計学者は，微分幾何はこれまでに統計学者が築いた理論を幾何学的に解釈し直しただけで，話を難しくしただけのものだと批判をしたものである．これに応えてでき上がったのが検定の高次漸近理論であり，これが幾何学理論の独自の成果と言える．もっとも，幾何学を使わなくてもこれはやろうと思えばできる．ただ，幾何学は統計学にとって極めて自然なものと言える．

参考文献

1) K. Kumon and S. Amari, Geometrical theory of higher-order asymptotics of test, interval estimator and conditional inference, *Proc. Royal Society of London A* **387**, 429–458, 1983.
2) S. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics, 28, 1985.
3) S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, American Mathematical society and Oxford University Press, 2000.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

完全へんげ奇方陣について

内田 伏一

0 はじめに

1つの方陣に，次数の違う小方陣をどれだけ多く内包させ得るかが研究されていた時期があった．n 方陣の中に，3方陣から $n-2$ 方陣まで，すなわち，n 方陣自身を含めて，$n-3$ 個の次数の違う方陣を内包させるのが限度である．この条件を満たす方陣を最初に（1988年）作成したのは，阿部楽方さんで，15方陣であった（図1）．存在が明らかになり，このような方陣を**完全包括方陣**と呼ぶことになった．

その後，多くの完全包括方陣が作成されるようになり，その中の6方陣で，3方陣，4方陣および6方陣について，単位定和の値が異なるものが，小林寿雄さんによって作成された（図2）．ここに，**単位定和**とは方陣の定和を次数で割った値（すなわちその方陣に含まれる数の平均値）のことである．互いに異なる単位定和の値が r 個である n 方陣を，**r へんげ n 方陣**と呼ぶ．とくに，$n-3$ へんげ完全包括 n 方陣を**完全へんげ n 方陣**という．

奇方陣の場合には完全へんげ方陣は発見されていなかったようで，阿部楽方さん作成の9へんげ17方陣（図3）が最高の作品だった．

完全包括方陣の作成は，奇方陣の場合が先行していたが，その殆どが1種類の単位定和を持つものであった．偶方陣の場合には，その単位定和が1種類になることはあり得ず，2種類の親子方陣を組み合わせた小方陣の配置図を利用したものなどが知られていた．

完全包括偶方陣についての系統だった作成は村越喜信さんによってなされている．しかも，すべてが完全へんげ方陣になっている．その最初に作られた12方陣を図4に示す．この図に示す小方陣の配置図の一般化が完全へんげ偶方陣の作成に大きく寄与している．

$n=15$　　阿部楽方作

102	216	21	142	1	196	136	4	199	33	193	34	192	149	77
214	22	103	3	195	141	6	198	135	168	58	161	65	128	98
23	101	215	194	143	2	197	137	5	138	88	144	82	62	164
84	225	30	112	181	46	130	7	202	70	156	80	146	173	53
223	31	85	47	113	179	9	201	129	182	44	81	145	162	64
32	83	224	180	45	114	200	131	8	87	139	178	48	126	100
90	222	27	96	219	24	124	10	205	37	189	41	185	94	132
220	28	91	217	25	97	12	204	123	188	38	127	99	79	147
29	89	221	26	95	218	203	125	11	157	69	176	50	76	150
191	55	93	42	134	163	153	104	115	75	118	109	117	154	72
35	171	133	184	92	63	73	122	111	108	151	49	177	155	71
86	67	186	68	105	166	211	209	13	19	190	106	43	160	66
140	159	40	158	121	60	15	17	213	207	36	183	120	61	165
78	74	187	52	175	54	20	14	208	210	170	110	119	57	167
148	152	39	174	51	172	206	212	18	16	56	116	107	59	169

図1　$K_p/p=113$; $p=3,4,5,\cdots,13,15.$

本誌 2002 年 10 月号に掲載された「完全へんげ偶方陣の一般的作法」という阿部楽方さんの解説の末尾に，完全へんげ奇方陣が存在するか否かについて考察せよ，という趣旨の設問がある．

本稿では，この設問に対する肯定的解答例を示す．

この考察にあたり，阿部楽方さんと村越喜信さんから，本稿末尾に示す文献の提供を受けた．お二人のご厚意に感謝する．

1 完全へんげ奇方陣

完全へんげ 9 方陣をコンピュータプログラムを利用して最初に作成できたが，次数の高い完全へんげ奇方陣を作成するには簡明な配置図の作成が必要になる．まず，完成の一歩手前の作品として，12 へんげ 17 方陣（図 5）を示す．この配置図を利用して，図 6 から図 9 の完全へんげ n 方陣 $(n=15,17,13,11)$ を作成できた．

$n=6$　小林寿雄作

8	21	25	19	4	34
28	22	11	12	24	14
7	13	27	26	29	9
30	17	10	16	5	33
23	2	32	35	18	1
15	36	6	3	31	20

図 2　$Kp/p = 19 - 3/p$; $p = 3, 4, 6.$

2 完全へんげ 15 方陣の作り方

2.1 準備

図 6 に示した完全へんげ 15 方陣の作り方の概略を示しておく．零和 15 方陣すなわち -112 から 112 までの 225 個の数を使った 15 方陣において考察する．この零和陣において，p 方陣の定和を k_p で表示する．

まず，図 6a を使って説明しよう．右上の 3×2 の矩形に含まれる $\circ$ 印の 6 個の数の和は，次の 2 つの式で表される．

$$3(k_{15}-k_{13}),\quad 2(k_{15}-k_{12}).$$

よって，$k_{15}-k_{13}$ は 2 の倍数であり，$k_{15}-k_{12}$ は 3 の倍数である．ここでは，$k_{15}-k_{13}=2$ として考察を進めよう．この結果，$k_{15}=0$ と合わせて，

$$k_p = p - 15\ ;\ p = 4, 6, 7, 8, \cdots, 12, 13, 15$$

となる．この条件の下に，数の和が 2 になる 2 つの数の対がたくさん必要になる．この節では，このような数の対 $x, 2-x$ を**補数対**と呼び，このような 2 つの数を互いに他方の**補数**と呼ぶことにしよう．

7 方陣の外部で $*$ 印以外の部分はすべて補数対に分割される．

9 方陣，11 方陣，13 方陣，15 方陣の右下の $*$ 印の 2 数の和は，その 2 数を含む 2 つの列の数の和を考慮すれば，いずれも -28 になる．

次に，3 方陣の左上隅の数 s の値を決めよう．この 3 方陣の定和は $k_3 = s+2$ である．一方，この 3 方

$n=17$　　阿部楽方作

264	25	256	33	266	23	20	270	210	81	191	100	138	153	148	141	146
29	260	27	262	31	258	22	268	94	197	83	208	134	157	143	145	147
28	261	30	259	26	263	215	75	85	206	96	195	130	161	144	149	142
257	32	265	24	255	34	236	54	193	98	212	79	196	163	189	87	91
231	58	223	66	233	56	271	19	132	159	198	93	128	92	102	204	200
62	227	60	229	64	225	216	74	113	178	126	180	89	174	164	108	176
61	228	63	226	59	230	52	238	185	106	111	162	202	117	127	183	115
224	65	232	57	222	67	249	41	109	104	181	151	168	121	136	172	166
38	251	14	275	244	45	53	237	187	179	110	140	123	170	155	119	125
274	15	254	35	219	70	51	77	76	272	217	246	55	43	42	250	269
253	36	273	16	205	84	213	245	214	18	73	44	235	247	248	40	21
13	276	37	252	17	243	239	186	69	78	137	158	12	285	280	1	182
194	95	241	48	46	289	50	103	220	211	152	131	277	4	9	288	107
201	88	72	160	154	124	47	175	192	190	86	177	2	281	284	11	221
207	82	129	234	135	165	242	114	97	99	203	112	287	8	5	278	68
39	199	49	218	184	122	169	150	101	156	118	173	10	283	282	3	209
90	267	240	71	105	167	120	139	188	133	171	116	279	6	7	286	80

図 3

$n=12$　　　　村越喜信作

3	133	8	11	18	112	123	132	111	107	81	31
1	143	138	135	128	34	23	14	35	39	65	115
9	137	15	121	10	16	104	126	113	22	117	80
12	134	13	131	136	130	42	20	33	124	29	66
106	40	19	127	27	109	43	87	93	120	47	52
116	30	141	5	25	119	103	59	53	26	99	94
142	4	140	6	77	69	75	97	41	72	63	84
144	2	95	51	122	24	37	71	105	74	83	62
118	28	82	64	108	38	101	45	67	55	68	96
17	129	102	44	21	125	57	89	86	90	61	49
88	58	7	139	98	48	92	54	60	56	79	91
114	32	110	36	100	46	70	76	73	85	78	50

図 4　$K_p/p=73-6/p$; $p=3,4,5,6,\cdots,10,12.$

$n=17$

156	101	211	76	132	146	183	79	213	162	130	190	102	177	115	41	251
99	109	105	187	200	169	136	210	82	172	120	126	166	124	168	226	66
218	91	173	175	106	123	119	149	143	104	188	122	170	137	155	171	121
29	231	178	179	74	98	216	111	181	11	281	274	18	32	260	136	56
263	114	61	103	208	186	70	285	7	283	9	272	20	259	33	250	42
127	194	117	201	81	92	193	286	6	280	14	265	27	258	34	54	238
113	165	160	84	204	191	88	96	196	217	75	22	270	37	255	65	227
289	85	64	287	4	145	86	80	257	13	279	21	271	44	248	67	225
3	207	228	5	288	147	206	1	212	131	161	19	273	45	147	68	224
284	144	10	150	110	14	276	15	116	214	256	118	174	51	241	71	221
8	148	282	142	182	278	16	277	176	2	78	264	28	240	52	90	202
192	108	138	197	17	23	24	267	266	30	243	153	223	242	50	198	94
100	184	154	95	275	269	268	25	26	262	49	35	139	245	47	215	77
209	89	140	252	31	38	258	57	58	59	60	229	230	246	222	219	73
83	203	152	40	261	254	39	235	234	233	232	63	62	36	46	220	72
48	239	151	43	55	107	112	134	135	159	163	164	167	195	199	205	189
244	53	141	249	237	185	180	158	157	133	129	128	125	97	93	69	87

図 5　$K_p/p=146-17/p$; $p=4,6,7,8,\cdots,13,14,15,17.$

陣には $*$ 印 2 個が含まれ，その 2 数の和は -28 であり，その他に 3 組の補数対が含まれる．よって，3 方陣に含まれる 9 個の数の和は $3k_3=s-22$ となる．2 つの等式から k_3 を消去して，$s=-14$ を得る．また，$k_3=-12$ となる．

さて，-112 から 112 までの数の中で，補数対を作ることのできない数は，$1,-112,-111$ の 3 個の数である．この中で，$-112,-111$ を $*$ 印の中に割り振り，1 を 7 方陣に含ませることにしよう．

数の和が -28 となる 2 数の対を，$(-112,84)$，$(-111,83)$，$(-82,54)$，$(-81,53)$ と決めよう．この 4 組を右下から順に配置する．3 方陣部分がうまく作られるなら，この順序にはこだわらなくても良い．

それを図 6b に記入する．以下，表の幅を考慮して，表の中では $-x$ を $\underline{x}$ で表示する．

この結果，3 方陣部分が決定し，さらに -14 の補数16 の位置が決定する．

新たに補数対からはみ出した数は $-51,-52$ である．この 2 数を含む 4 方陣で $k_4=-11$ となるものを作る．すでに図 6b に現れている数を除くことは当然であるが，これ以外の制約はない．

次に図 6c を図 6b に埋め込むのだが，埋め込み方については後に述べる．ここでは，4 方陣の変換によって 4 方陣の隅に位置することができる数は図 6c の中で，

$$49,15,-37,-38,19,44,-33,-41 \qquad (1)$$

の 8 個であることを注意しておく．

2.2 7 方陣部分の作り方

図 6c の 4 方陣に含まれる数で，$-51,-52$ 以外の数を並べてみる．それを図 6d の上段に示し，その補数を下段に示しておく．

ここで，図 6a の □ 印の 6 個の数の和について考察

$n=15$

124	148	71	156	93	114	77	38	190	223	5	13	205	189	39
78	151	139	100	96	115	104	111	117	27	201	204	24	47	181
137	66	67	86	153	113	161	193	35	92	136	125	103	106	122
121	83	138	162	89	62	128	146	82	58	170	219	9	214	14
152	102	88	61	132	157	91	101	127	164	64	112	16	15	213
90	107	145	142	80	72	147	225	3	168	60	48	180	22	206
81	126	135	76	140	150	75	36	192	169	59	46	182	26	202
224	74	44	133	94	84	63	129	166	11	217	45	183	97	131
4	154	184	95	134	144	165	32	99	187	41	222	6	179	49
17	195	130	70	159	149	174	18	51	109	167	52	176	188	40
211	33	98	158	69	79	54	210	177	31	119	163	65	191	37
194	7	141	220	216	56	55	23	10	160	73	116	196	199	29
34	221	87	8	12	172	173	205	218	68	155	2	112	200	28
203	19	120	42	20	43	85	105	118	171	175	178	198	21	197
25	209	108	186	208	185	143	123	110	57	53	50	30	1	207

図 6　$K_p/p = 114 - 15/p$; $p = 3, 4, 5, 6, \cdots, 11, 12, 13, 15.$

$n=17$

137	234	70	82	187	148	127	51	245	277	19	18	278	176	120	76	220
214	169	73	209	111	50	159	238	58	10	286	266	30	100	196	198	98
89	55	138	153	146	246	158	155	141	157	139	160	136	168	128	170	126
154	90	200	223	6	207	105	202	94	12	284	279	17	273	23	257	39
145	152	147	62	109	144	226	289	7	283	13	53	243	44	252	249	47
96	142	206	149	185	103	104	68	228	75	221	21	275	247	49	242	54
150	143	151	107	241	87	106	74	222	88	208	215	81	261	35	235	61
288	16	140	42	9	285	113	199	189	282	14	172	124	263	33	217	79
8	280	156	254	287	11	183	5	97	258	38	167	129	264	32	219	77
84	225	135	201	45	112	281	101	72	131	190	130	166	265	31	66	230
212	71	161	95	251	184	15	195	224	4	165	227	69	28	268	65	231
276	43	125	99	194	80	274	93	163	132	41	162	191	27	269	63	233
20	253	171	197	102	216	22	203	133	164	255	3	134	26	270	60	236
204	117	123	181	24	267	262	260	259	40	46	48	121	25	192	59	237
92	179	173	115	272	29	34	36	37	256	250	248	175	2	271	56	240
239	86	119	67	52	78	85	114	116	118	174	186	188	205	213	232	193
57	210	177	229	244	218	211	182	180	178	122	110	108	91	83	1	64

図 7　$K_p/p = 148 - 51/p$; $p = 3, 4, 5, 6, \cdots, 13, 14, 15, 17.$

しておく．7 方陣の定和 $k_7 = -8$ より，7 方陣の上段 3 行分の数の和は -24 になる．一方，□ 印の 6 箇所以外は 5 組の 3 個の数の和が 3 になる 3 数の組に分割されている．よって，□ 印の 6 個の数の和は -39 になる．

7 方陣の中の 4 方陣の外部を，1 および図 6d の下段の 14 個の数と 9 組の補数対を使って作りたい．まず，図 6a の □ 印の 6 個の数に当たる数の候補を図 6d の下段の数から探す．運よく，

$$-47, -42, -35, 24, 26, 35$$

の 6 個の数の和が -39 になっている．このような数の組を探し出せない場合には，1 組の補数対を崩して作る．図 6d の下段の残りの数

$$-32, -27, -25, -17, -13, 39, 40, 43$$

および 1 と 9 組の補数対を使って，9 組の 3 個の数の和が 3 になる 3 数の組を作りたい．それを図 6e のように表示しよう．

縦に並んだ 3 数の和は，いずれも 3 になっている．9 組の補数対がどこに使われているか確かめてほしい．これらの数を和が 3 になる 3 数の組をうまく配置して，次の図 6f を作る．図の中心の t は先の (1) に示した 4 方陣の隅に現れる数である．

図 6f の上段の 3 行の和，左側の 3 列の和および副対角線（左下がりの対角線）の和を計算して，次の等式を得る．

$$a = 0,\ y = 24-2x,\ v = -8,\ u = x-14,\ x+t = 38.$$

$n = 13$

88	127	46	60	7	134	115	138	38	154	22	165	11
120	9	27	169	141	69	42	26	150	92	84	51	125
77	14	167	35	116	61	107	100	76	18	158	48	128
117	113	34	110	81	66	56	129	47	160	16	33	143
63	142	59	6	149	80	78	31	145	21	155	139	37
68	64	132	99	79	5	130	104	72	83	93	28	148
44	108	112	98	4	162	49	147	29	12	164	30	146
105	85	74	124	67	73	55	75	95	58	118	41	135
71	91	102	52	109	103	121	3	101	168	8	133	43
10	131	123	19	94	151	111	13	20	161	96	137	39
166	45	53	157	82	25	65	163	156	2	15	140	36
57	54	153	70	114	24	32	40	89	90	126	159	97
119	122	23	106	62	152	144	136	87	86	50	1	17

図 8　$K_p/p = 88 - 39/p$; $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13.$

$n = 11$

64	59	96	9	58	51	78	29	99	20	108
12	35	11	94	95	91	77	48	80	98	30
97	10	93	89	39	50	37	115	13	74	54
19	111	62	70	3	32	118	40	88	28	100
66	109	17	33	117	67	6	38	90	81	47
86	49	57	116	34	5	68	114	14	83	45
71	42	79	4	69	119	31	104	24	43	85
120	7	65	113	23	56	46	53	60	25	103
8	121	63	15	105	72	82	2	75	106	22
27	55	110	87	21	84	52	26	36	112	61
101	73	18	41	107	44	76	102	92	1	16

図 9　$K_p/p = 64 - 33/p$; $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11.$

ここで，$t = 49$ とすれば，$x = -11$ となり，7 方陣を図 6g のように決めることができる．

この図 6g を図 6b にはめ込む．上述したのは作業がうまく運んだ場合の説明である．実際の作業では図 6f において，4 方陣の上部の 4 列の入れ替え，4 方陣の左側の 4 行の入れ替え，さらに 4 方陣の隅の数の入れ替えなど，試行錯誤を繰り返して図 6g にたどり着くことになる．

このような煩雑さは残るが，紙と鉛筆とポケット電卓（または算盤）があれば，手作業でやれる仕事になった．

2.3 最後の追い込み

7 方陣の部分がうまく処理できれば，残りの作業は補数対を対のまま割り振る作業が残るのみである．この部分の作業は完全へんげ偶方陣の作り方と全く同じである．

5 方陣部分を最初に作り，後は小方陣ごとに左上から右下へと副対角線の和に注意しながら作業を進めるのみである．

2.4 拡張の際の注意事項

図 6 の完全へんげ 15 方陣に使った配置図を自然に拡張したものが，一般の n 方陣（n：奇数）にも適用できるかどうかについて調べてみた．その結果，配置図については自然な拡張で良いようだが，小方陣の定和について若干の調整が必要になることが分かった．

以下，零和 n 方陣においての説明である．

n が 3 で割り切れる場合　p 方陣の定和を $k_p = p - n$ と置き，$n = 15$ の場合と全く同様の作業ができる．

n が 3 で割り切れない場合　p 方陣の定和を $k_p = 3(p - n)$ と変更する．

$n = 15$ の場合と殆ど同じ作業ができる．ただし，定和の変更によって，数の和が 6 になる 2 つの数の対 $x, 6 - x$ がたくさん必要になる．この結果，4 方陣に入れるべき数が 2 個から 6 個に増えることになる．

このように 2 つの場合に分けて作業を実行することにした理由は，3 方陣を所定の場所に埋め込むことができるようにするためである．

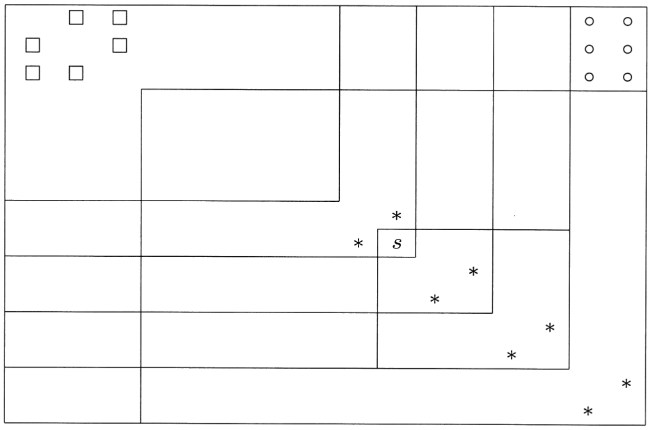


図 6a

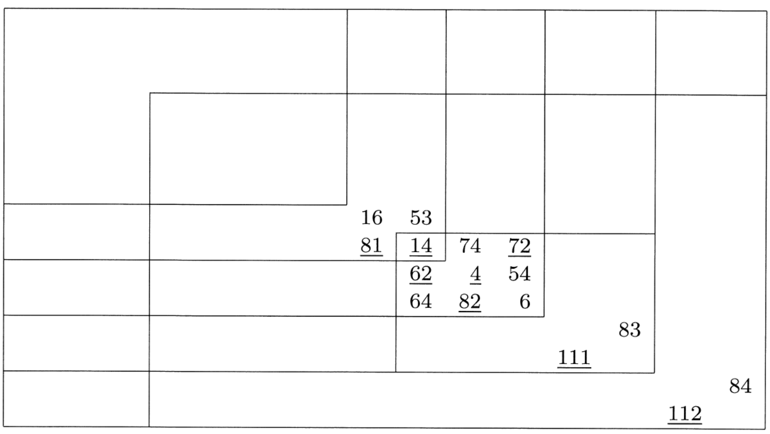


図 6b

49	$\underline{24}$	$\underline{51}$	15
$\underline{52}$	19	44	$\underline{22}$
29	$\underline{33}$	$\underline{41}$	34
$\underline{37}$	27	37	$\underline{38}$

図 6c

49	44	37	34	29	27	19	15	−22	−24	−33	−37	−38	−41
−47	−42	−35	−32	−27	−25	−17	−13	24	26	35	39	40	43

図 6d

43	40	39	−32	1	$x+2$	$-x$	$u+2$	$-u$
−13	−17	−25	22	$a+2$	$y+2$	$-y$	$v+2$	$-v$
−27	−20	−11	13	$-a$	$-x-y-1$	$x+y+3$	$-u-v-1$	$u+v+3$

図 6e

$-x$	35	−42	43	−20	1	$-x-y-1$
−35	$x+y+3$	26	−13	−17	$a+2$	$x+2$
24	−47	$-y$	−27	40	$-a$	$y+2$
$-v$	$u+v+3$	$-u$	t			
39	−11	−25				
$u+2$	$v+2$	$-u-v-1$				
−32	13	22				

図 6f

11	35	$\underline{42}$	43	$\underline{20}$	1	$\underline{36}$
$\underline{35}$	38	26	$\underline{13}$	$\underline{17}$	2	$\underline{9}$
24	$\underline{47}$	$\underline{46}$	$\underline{27}$	40	0	48
8	$\underline{30}$	25	49	$\underline{24}$	$\underline{51}$	15
39	$\underline{11}$	$\underline{25}$	$\underline{52}$	19	44	$\underline{22}$
$\underline{23}$	$\underline{6}$	32	29	$\underline{33}$	$\underline{41}$	34
$\underline{32}$	13	22	$\underline{37}$	27	37	$\underline{38}$

図 6g

参考文献

1) 阿部楽方:『包括方陣・へんげ方陣・重複方陣』, 1989 年.
2) 阿部楽方:「完全へんげ偶方陣の一般的作法」, 数理科学 2002 年 10 月号.
3) 村越喜信:世界一精密な魔方陣「完全緑華 60 方陣の解説」2007 年 10 月.

(うちだ・ふいち, 山形大学名誉教授)

特　集（2012 年 6 月号予告）

面白い発想［物理編］

物理的思考のためのヒントを探る

本体 952 円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．様々な数学の方法と物理現象が登場し，それらがお互いに響かせ合い，新しい世界を生み出すのは，まるでバレエで音楽と踊りの相乗効果で生み出される新しい世界を見ているようで，大変面白いものです．

2 つの世界が響き合い新しい世界が登場する場面は他にもあるかと思います．私ももっと探してみたいと思います．（R）

*　　*

以前，物理の勉強をしていたとき，物体の運動と微分・積分が結びついた瞬間に理解が深まったのを覚えています．物理学に対する興味をよりもつようになったのはそれがきっかけでした．

今回の特集では，それよりも高度な内容になっていますが，私が感じた物理の魅力がたくさん盛り込まれているように思います．読者の皆さんにも楽しんでもらえるのではないかと感じました．（T）

数　理　科　学　5月号
2012 年 5 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 木 下 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁